1. Csoportot alkotnak-e az összeadásra vagy a szorzásra nézve
a) a pozitív determinánsú $n \times n$-es valós mátrixok;
b) a $\mathbb{Z}$ fölötti $n \times n$-es mátrixok;
c) a $\mathbb{Z}$ fölötti nem 0 determinánsú $n \times n$-es mátrixok;
d) a $\mathbb{Z}$ fölötti 1 determinánsú $n \times n$-es mátrixok;
e) az $n \times n$-es valós felső háromszögmátrixok?

2. Hány eleme van a következő geometriai alakzatok egybevágósági csoportjának? Mik ezek az egybevágóságok?
a) téglalap;
b) négyzet alapú egyenes hasáb (ami nem kocka);
c) szabályos háromszög;
d) egyenlőszárú háromszög;
e) paralelogramma;
f) kör.

3. Bizonyítsuk be, hogy ha egy csoportban $x^2 = 1$ minden x elemre, akkor a csoport kommutatív!

4. Hányadrendű elemek vannak
a) az $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ csoportban;
b) az $\mathbb{R}$ additív csoportjában;
c) a $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$ csoportban;
d) $GL_2(\mathbb{R})$-ben;
e)* $GL_2(\mathbb{Q})$-ban,
ahol $GL_n(K) = \{ A \in K^{n\times n} \mid |A| \neq 0 \}$ a szorzással?

5. Bizonyítsuk be, hogy egy páros elemszámú véges csoportban mindig van másodrendű elem!

6. a) Keressünk olyan geometriai alakzatot, amelynek az egybevágósági csoportja, illetve olyan gráfot, amelynek automorfizmuscsoportja izomorf Z_3-mal.
b) Adjunk meg olyan (végtelen) gráfot, amelynek az automorfizmuscsoportja végtelen.
Egy gráf automorfizmusa egy olyan $\varphi : V(G) \to V(G)$ bijekció, amelyre $(a, b) \in E(G) \Leftrightarrow (a\varphi, b\varphi) \in E(G)$.

7. Bizonyítsuk be, hogy a $G_1 = (\mathbb{Z}_8, +)$, $G_2 = (\mathbb{Z}_{16}^*, \cdot)$, és $G_3 = (\mathbb{F}_2^3, +)$ 8-adrendű Abel-csoportok páronként nem izomorfak. (Mennyi az elemek rendje ezekben a csoportokban?)

8. Az alábbi szorzástáblákkal megadott struktúrák közül melyik csoport? Amelyik nem, abban melyik axióma nem teljesül?

$\cdot$	a	b
a	a	a
b	b	b

$\cdot$	a	b
a	a	b
b	b	b

$\cdot$	a	b
a	a	b
b	b	a

$\cdot$	a	b	c
a	a	b	c
b	b	b	a
c	c	a	c

9. Legyen g egy csoportelem, g rendje $o(g) = n$, és $k, m \in \mathbb{Z}$. Lássuk be, hogy
a) $g^m = 1 \Leftrightarrow n \mid m$;
b) $o(g^k) = \dfrac{n}{(n, k)}$.
Fogalmazzuk meg és bizonyítsuk be a megfelelő állításokat végtelen rendre!
Milyen rendű elemek vannak Z_n-ben és Z-ben?

Hf1. Csoportot alkotnak-e a $(-1, 1)$ nyílt intervallum elemei az $a * b = \dfrac{a+b}{1+ab}$ műveletre mint szorzásra nézve? Ne felejtsük el azt is ellenőrizni, hogy az ilyen elemek szorzata értelmezve van, és benne van az intervallumban!)

Hf2. Bizonyítsuk be, hogy $o(ab) = o(ba)$ egy G csoport tetszőleges a, b elemeire.