1. Legyenek A és B a G csoport részcsoportjai. Lássuk be, hogy az $AB = \{\, ab \mid a \in A,\ b \in B \,\}$ komplexusszorzat akkor és csak akkor részcsoport, ha $AB = BA$.

2. Legyen A és B a G véges csoport két részcsoportja. Bizonyítsuk be, hogy $|AB| = \dfrac{|A| \cdot |B|}{|A \cap B|}$.

3. Legyen $a, b \in G$, és $o(a), o(b) < \infty$. Bizonyítsuk be, hogy ha $ab = ba$, akkor
a) $o(ab) \mid [o(a), o(b)]$,
b) és ha emellett $\langle a \rangle \cap \langle b \rangle = 1$ (pl. mert $(o(a), o(b)) = 1$), akkor $o(ab) = [o(a), o(b)]$.
Lássuk be, hogy ha $ab \neq ba$, akkor még az a) állítás sem feltétlenül igaz.

4. Bizonyítsuk be, hogy ciklikus csoport minden részcsoportja ciklikus, és Z_n-ben minden $d \mid n$-hez egyetlen d-elemű részcsoport van.

5. Határozzuk meg a következő csoportok összes részcsoportját!

D_8 (a négyzet szimmetriacsoportja), $\qquad Z_{16}, \qquad Z_{12}$

6. Bizonyítsuk be, hogy bármely végtelen csoportnak végtelen sok részcsoportja van.

7. a) Lássuk be, hogy $(\mathbb{Q}, +)$ minden végesen generált részcsoportja ciklikus (elég megmutatni, hogy tetszőleges, két elemmel generált részcsoportja egy elemmel is generálható).
b)* Bizonyítsuk be, hogy $(\mathbb{Q}, +)$-nak nincs minimális generátorrendszere, sőt, minden generátorrendszerből tetszőleges elem elhagyható.

8. Bizonyítsuk be, hogy ha n-nek pontosan k különböző prímosztója van, akkor Z_n minden minimális (azaz fölösleges elemet nem tartalmazó) generátorrendszere k-elemű.

9. Legyen p prím, és Z_{p^∞} a komplex p-hatványadik egységgyökök multiplikatív csoportja (kváziciklikus csoport). Lássuk be, hogy Z_{p^∞} minden valódi részcsoportja véges ciklikus csoport, és hogy a részcsoportok a tartalmazásra nézve láncot alkotnak.

Hf1. Bizonyítsuk be, hogy az $\mathbb{F}_2$ fölötti invertálható 3×3-as felső háromszögmátrixok csoportja nem ciklikus.

Hf2. Határozzuk meg a $G = (\mathbb{Z}_{16}^*, \cdot)$ csoportra a generátorrendszerek minimális elemszámát, $d(G)$-t. Adjunk meg olyan $d(G)$ elemű generátorrendszert, amelynek elemei diszjunkt (azaz csak $\{\, 1 \,\}$-ben metsző) részcsoportokat generálnak, és olyat is, amelyre ez nem igaz! (A generálás bizonyításához használhatjuk a 2. feladatot.)