

1. a) Milyen rendű elemből hány van a Z_n ciklikus csoportban?
b) Bizonyítsuk be, hogy $\mathbb{Z}_{2^n}^*$ -ban minden elem rendje osztója 2^{n-2} -nek.
 2. Legyenek G, H csoportok, $a \in G$ és $b \in H$. Bizonyítsuk be, hogy
 - a) ha van olyan $\varphi : G \rightarrow H$ csoporthomomorfizmus, amelyre $\varphi(a) = b$, akkor $o(b) \mid o(a)$;
 - b) ha $G = \langle a \rangle$, és $o(b) \mid o(a)$, akkor van olyan $\varphi : G \rightarrow H$ homomorfizmus, amelyre $\varphi(a) = b$;
 - c) ha $G \neq \langle a \rangle$, akkor a b) állítás nem feltétlenül igaz (legyen $G = D_8$ diédercsoport, $H = Z_4$, és $o(b) = o(a) = 4$).
 3. Hányadrendű lehet egy hatodrendű elem képe a következő homomorfizmusoknál:
 - a) $Z_6 \rightarrow Z_{15}$
 - b) $Z_6 \rightarrow Z_{12}$
 - c) $Z_{12} \rightarrow Z_6$
 4. Legyen $|G| = 91$. Hány olyan $G \rightarrow G$ homomorfizmus van, ami G -nek legalább két, különböző rendű, az egységtől különböző elemét 1-be viszi?
 5. a) Adjuk meg az $a = (132)(45)$ permutációnak a $b = (254)$ permutációval vett konjugáltját, $b^{-1}ab$ -t.
b) Melyek konjugáltak S_6 -ban az (1234) permutációval az (123) , $(4523)(16)$, (4321) és $(24)(314)$ permutációk közül?
c) Hány különböző permutáció konjugálja S_7 -ben az $(123)(45)(67)$ elemet önmagába? És a $(325)(61)(47)$ elembe? Konjugált-e a két elem A_7 -ben is?
 6. Határozzuk meg a következő csoportok konjugáltosztályait és normálosztóit!
 $S_3, S_4, S_5, Q, D_8, D_{2n}$
 7. a) Bizonyítsuk be, hogy $Z(S_n) = 1$, ha $n \geq 3$.
b) Határozzuk meg a D_{2n} diédercsoport centrumát.
 8. Hány konjugáltja van az $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ elemeken ható S_5 -nek, illetve a $H = \langle (12345) \rangle$ részcsoporthoz S_7 -ben? Határozzuk is meg a két részcsoporthoz normalizátorát!
- Hf1.** Legyenek A és B a G csoport részcsoporthajai, és tegyük föl, hogy A és B kommutatívak, és $G = AB$. Bizonyítsuk be, hogy $A \cap B$ normálosztója G -nek.
- Hf2.** Bizonyítsuk be, hogy két konjugáltosztály komplexusszorzata zárt a konjugálásra, azaz teljes konjugáltosztályok uniója. Hány konjugáltosztályra bomlik S_5 -ben a $\mathcal{K}_1\mathcal{K}_2$ komplexusszorzat (milyen ciklusfelbontású elemek vannak benne), ha \mathcal{K}_1 a 3-ciklusok, \mathcal{K}_2 pedig a 2-ciklusok konjugáltosztálya?