Általánosítsuk a belső és külső direkt szorzatot k tagra:

Belső: $G = \prod_{i=1}^{k} N_i \Leftrightarrow N_i \lhd G\ \forall i, \quad G = N_1 \cdots N_k, \quad N_i \cap (N_! \cdots N_{i-1} N_{i+1} \cdots N_k) = 1\ \forall i$

Külső: G_i csoportokra $\prod_{i=1}^{k} G_i$ a G_i-k Descartes-szorzata a komponensenkénti szorzással
Az utóbbi is tekinthető belsőnek, ha G_i-t azonosítjuk az $1 \times 1 \times \cdots G_i \times 1 \times \cdots \times 1$ részcsoporttal.

1. Bizonyítsuk be, hogy $N_i \lhd G$-re $G = \prod_{i=1}^{k} N_i \Leftrightarrow G$ minden g eleme egyértelműen írható $g = n_1 \cdots n_k$ alakban, ahol $n_i \in N_i$, $i = 1, \dots, k$.

2. Bizonyítsuk be, hogy ha $A, B \lhd G$, és $A \cap B = 1$, akkor minden $a \in A$, $b \in B$ elemre $ab = ba$.

3. Lássuk be, hogy ha $G = \prod_{i=1}^{k} N_i$, és $g = n_1 \dots n_k$, ahol $n_i \in N_i$, akkor $o(g) = [o(n_1), \dots, o(n_k)]$.

4. Milyen rendű elemből hány van az alábbi csoportokban?

$$Z_4 \times Z_4 \times Z_2, \qquad Z_4 \times Z_2 \times Z_2 \times Z_2, \qquad D_8 \times Z_4$$

5. Bizonyítsuk be, hogy $D_{12} \cong D_6 \times Z_2$, de $D_{24} \ncong D_{12} \times Z_2$.

6. Lássuk be, hogy ha $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_r^{\alpha_r}$, akkor $Z_n \cong Z_{p_1^{\alpha_1}} \times \cdots \times Z_{p_r^{\alpha_r}}$, és ennél több nem triviális tényező direkt szorzatára nem lehet a Z_n-et felbontani.

7. Mutassuk meg, hogy $Z(G \times H) = Z(G) \times Z(H)$.

8. Hány konjugáltosztálya van $S_4 \times S_4$-nek?

9. Keressünk
a) p-Sylow-részcsoportot S_p-ben;
b) 2-Sylow-részcsoportot S_4-ben és S_6-ban!

10. Legyen $G \leq S_n$. Lássuk be, hogy
a) ha G reguláris, akkor $|G| = n$;
b) ha G tranzitív, akkor $n \mid |G|$.

11. Melyik tranzitív az alábbi permutációcsoportok közül?
$G_1 \langle (1234), (23) \rangle \leq S_4, \quad G_2 = \langle (12)(123), (56) \rangle \leq S_6, \quad G_3 = \langle (1234), (435) \rangle \leq S_5$
Mit mondhatunk ennek alapján G_3 rendjéről?

Hf1. Bizonyítsuk be, hogy a $G \times G$ direkt szorzat diagonális részcsoportja, $T = \{(g, g) \mid g \in G\}$ akkor és csak akkor normálosztó, ha G Abel-csoport. (Azt is lássuk be, hogy ez részcsoport!)

Hf2. Milyen n-re van S_n-nek 6-elemű tranzitív részcsoportja?