

1. Legyen $H < G$, ahol $|G : H| = n$. Tekintsük G -nek azt a csoporthatását a H jobb oldali mellékosztályain, amelynél minden $g \in G$ a Hx mellékosztályt Hxg -be viszi.
 - a) Bizonyítsuk be, hogy ez tranzitív csoporthatás n elemen.
 - b) Lássuk be, hogy a csoporthatás magja $\bigcap_{x \in G} x^{-1}Hx$ a G -nek a H -ban levő legnagyobb normálosztója.
2. Legyen $H < G$, $|G : H| \leq n$, és $|G| > n!$. Bizonyítsuk be, hogy ekkor G nem lehet egyszerű.
3. Hány eleme van a \mathbb{Z}_2 fölötti 3×3 -as invertálható mátrixok csoportjának, $GL_3(\mathbb{Z}_2)$ -nek? Adjuk meg ennek a csoportnak egy 2-Sylow-részcsoportját.
4. Legyen $P \in Syl_p(G)$. Bizonyítsuk be, hogy az alábbi állítások ekvivalensek.
 - (i) $P \triangleleft G$;
 - (ii) $|Syl_p(G)| = 1$;
 - (iii) P tartalmazza G -nek minden p -hatványrendű részcsoportját;
 - (iv) P karakterisztikus részcsoport G -ben, azaz minden $\sigma \in \text{Aut } G$ -re $P^\sigma = P$.
5. A Sylow-részcsoportok vizsgálatával bizonyítsuk be, hogy minden 91-edrendű csoport ciklikus.
6. Bizonyítsuk be, hogy G nem lehet egyszerű, ha $|G| = 36, 56, 80$ vagy 30 .
7. Bizonyítsuk be, hogy G -ben valamelyik Sylow-részcsoport mindenképpen normálosztó, ha
 - a) $|G| = pq$; b) $|G| = p^2q$; c) $|G| = pqr$, ahol p, q, r különböző prímelek.
- Hf1.** Bizonyítsuk be, hogy S_5 tartalmaz D_{12} -vel izomorf (nem tranzitív) részcsoportot. Keresünk a szabályos hatszögön öt olyan alakzatot, amelyeknek a halmazán a hatszög szimmetriái hűségesen hatnak (azaz nincs D_{12} -nek olyan 1-től különböző eleme, amely mind az ötöt helyben hagyja)!
- Hf2.** Legyen G egy 140-edrendű csoport. Bizonyítsuk be, hogy G -nek legalább két Sylow-részcsoportja normálosztó! Ezt felhasználva lássuk be, hogy G -ben van 35-ödrendű elem!

Emlékeztető az első zh-hoz (A zh témája az első 6 feladatsor anyaga.)

- Számolás permutációkkal: ciklusfelbontás; szorzás, hatványozás, konjugálás, paritás eldöntése, elemrend a ciklusfelbontás alapján.
- Konjugáltosztályok, elemek centralizátora, speciálisan S_n -ben és A_n -ben.
- Szimmetriacsoportok, D_{2n} , számolás D_{2n} -ben.
- Csoport, részcsoport, normálosztó, mellékosztályok, komplexusszorzat, és ezek elemszámával, illetve az elemrendekkel kapcsolatos tételek. Ciklikus csoport elemrendjei, részcsoportjai.
- Homomorfizmus és izomorfizmus, mag, kép, homomorfizmustétel.
- Faktorcsoport, faktorcsoport elemeinek rendje, részcsoport, ill. normálosztó képe a faktorizálásnál, izomorfizmustételek.
- Direkt szorzat, direkt szorzat elemeinek rendje.