**1.** Legyen $a, b \in \mathbb{Z}$, és jelölje $(a_1, \dots, a_n)$ az $a_1, \dots, a_n$ által generált ideált a $\mathbb{Z}$ gyűrűben.
a) Adjunk feltételt arra, hogy $(a) \subseteq (b)$ legyen.
b) Milyen elem generálja az $(a) \cap (b)$ ideált?
c) Milyen elem generálja az $(a) + (b)$ ideált?

**2.** A $H$ részhalmazaiból álló $(P(H), \triangle, \cap)$ gyűrűben (ahol $\triangle$ a szimmetrikus differencia mint összeadás, és $\cap$ a metszet mint szorzás) mi egy $A \in P(H)$ elem által generált részgyűrű, illetve ideál?

**3.** a) Bizonyítsuk be, hogy egy $H$ végtelen halmaz véges részhalmazai részgyűrűt alkotnak $P(H)$-ban, de ez a gyűrű nem egységelemes.
b) A $P(H)$ egyetlen eleme által generált részgyűrűnek, illetve ideálnak mint gyűrűnek van-e egységeleme?

**4.** a) Bizonyítsuk be, hogy az $R = M_n(K)$ gyűrű centruma pontosan a skalármátrixokból áll. (Mit jelent egy $A$ mátrixra, hogy $E_{ij}A = AE_{ij}$?)
b) Bizonyítsuk be, hogy $Z(GL_n(K)) = \{\, cI \mid c \neq 0 \,\}$, és $Z(SL_n(K)) = \{\, cI \mid c^n = 1 \,\}$.

**5.** Határozzuk meg az $M_2(\mathbb{R})$ gyűrű balideáljait.

**6.** Hány eleme van a $K[x]/(x-1)$ és $K[x]/(x^2-1)$ faktorgyűrűnek $K = \mathbb{Z}_2$ és $K = \mathbb{Z}_3$ esetén? A négy közül melyik faktorgyűrű test?

**7.** Bizonyítsuk be, hogy $\mathbb{R}[x]/(x^2+1) \cong \mathbb{C}$. (Használjuk a homomorfizmustételt!)

**Hf1.** Adjuk meg az összes olyan 200-adrendű Abel-csoportot izomorfia erejéig, amelyben nincs 100-adrendű elem!

**Hf2.** Bizonyítsuk be, hogy $\langle x, y \mid y^{-1}xy = x^2,\ x^{-1}yx = y^2 \rangle = 1$