1. Tekintsük az alábbi gyűrűket:
  a) páratlan nevezőjű törtek $\mathbb{Q}$-ban;
  b) 2-hatvány nevezőjű törtek $\mathbb{Q}$-ban;
  c) $n\mathbb{Z}$ (azaz az n-nel osztható egészek);
  d) $\mathbb{Z}_n$.

Melyik lesz ezek közül integritási tartomány?
Az integritási tartományokra vizsgáljuk meg az alábbi kérdéseket.
(A) Mit jelent az oszthatóság?
(B) Mik az egységek, irreducibilisek, prímek?
(C) Lehet-e minden nem egységet irreducibilisek szorzatára bontani, és ez a felbontás egyértelmű-e sorrend és egységszeres erejéig?
(D) Van-e legnagyobb közös osztó?

2. Legyen R integritási tartomány.
  a) Bizonyítsuk be, hogy ha R-ben bármely két nemnulla elemnek van legnagyobb közös osztója, akkor bármely két nemnulla elemnek van legkisebb közös többszöröse is.
  b) Lássuk be, hogy ha csak azt tesszük fel, hogy valamely $a, b \neq 0$ elemeknek van legnagyobb közös osztójuk, abból nem következik, hogy lenne legkisebb közös többszörösük is: legyen $R = \{\, a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n \mid a_i \in \mathbb{Z},\ 2 \mid a_1 \,\}$, és $a = 2$, $b = 2x$.

3. Mutassuk meg, hogy $\mathbb{Z}[i\sqrt{3}] = \{\, a + bi\sqrt{3} \mid a, b \in \mathbb{Z} \,\} \leq \mathbb{C}$ nem UFD: adjuk meg a 4-nek két lényegesen különböző faktorizálását.

4. Tekintsük a $\mathbb{Z}[i\sqrt{5}] = \{\, a + bi\sqrt{5} \,\}$ részgyűrűt $\mathbb{C}$-ben. Bizonyítsuk be, hogy a $\{\, 2,\ 1 + i\sqrt{5} \,\}$ halmaz által generált ideál nem főideál $\mathbb{Z}[i\sqrt{5}]$-ben.

5. Mutassuk meg egy példával, hogy $\mathbb{Z}[i\sqrt{5}]$-ön $\varphi : a + bi\sqrt{5} \mapsto a^2 + 5b^2$ nem euklideszi függvény. Van-e legnagyobb közös osztó ebben a gyűrűben?

6*. a) Tegyük fel, hogy R euklideszi gyűrű, de nem test. Lássuk be, hogy van olyan $a \in R$ nem egység, amelyre minden $b \in R \setminus (a)$ elemhez létezik olyan $c \in R$ egység, hogy $a \mid b - c$.
  b) Az a) rész segítségével mutassuk meg, hogy $\left\{ a + b\frac{1+i\sqrt{19}}{2} \;\middle|\; a, b \in \mathbb{Z} \right\} \leq \mathbb{C}$ nem euklideszi gyűrű.

7. Bizonyítsuk be, hogy
  a) egy R PID-ben $0 \neq p \in R$ pontosan akkor irreducibilis, ha $R/(p)$ test;
  b) egy R UFD-ben $0 \neq p \in R$ pontosan akkor irreducibilis, ha $R/(p)$ nullosztómentes.

Hf1. Legyen $R = (P(H), \triangle, \cap)$ a H halmaz hatványgyűrűje (ahol $\triangle$ a szimmetrikus differencia). Lássuk be, hogy
  a) R minden részgyűrűje zárt az unióra;
  b) ha egy $\emptyset \neq S \subseteq P(H)$ zárt a metszetre és az unióra, még nem feltétlenül részgyűrű (adjunk ellenpéldát);
  c) $\emptyset \neq S \subseteq R$ ideál $\Leftrightarrow$ S zárt az unióra és a részhalmazra;

Hf2. Írjuk fel a $\mathbb{Z}_2[x]/(x^2 + x)$ faktorgyűrű szorzástábláját! Van-e valódi (azaz a teljestől és az egyeleműtől különböző) ideálja ennek a faktorgyűrűnek?