1. Legyen α az $x^2 - x + 1 \in \mathbb{Q}[x]$ polinom egyik gyöke.

a) Hány dimenziós $\mathbb{Q}(\alpha)$ mint $\mathbb{Q}$ fölötti vektortér?

b) Bizonyítsuk be, hogy α^7 és α lineárisan összefüggnek ebben a vektortérben.

2. Legyen α az $x^3 - 3x - 1 \in \mathbb{Q}[x]$ polinom egyik gyöke. Adjuk meg a következő kifejezéseket α legföljebb másodfokú polinomjaként!

$$\alpha^3 \qquad \alpha^5 \qquad \frac{1}{\alpha} \qquad \frac{1}{\alpha^2+1}$$

3. Bizonyítsuk be, hogy $\mathbb{Q}[x]/(x^2-2) \cong \mathbb{Q}[x]/(x^2-2x-1)$.

4. Adjuk meg $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ minimálpolinomját $\mathbb{Q}$, illetve $\mathbb{Q}(\sqrt{6})$ fölött!

5. Legyen $L = K(t)$, ahol t transzcendens K fölött, és $M = K(t^2+t+1)$. Határozzuk meg a három test közötti tartalmazási viszonyokat, és a bővítések fokait.

6. Bizonyítsuk be, hogy ha $K \le L$, és $\alpha \in L$ minimálpolinomja K fölött páratlan fokú, akkor $\alpha \in K(\alpha^2)$.

7. Lássuk be, hogy $\mathbb{Q}$ minden másodfokú bővítése megadható egy $\sqrt{d}$ elemmel való bővítésként, ahol $d \in \mathbb{Q}$.

8. Tegyük fel, hogy α minimálpolinomja K fölött $f(x) = x^n - a$. Mi az α^m minimálpolinomja $m \mid n$ esetén?

9. Hányadfokú a $\mathbb{Q}(i\sqrt{3})$, illetve az $\mathbb{Q}(i+\sqrt{3})$ bővítés $\mathbb{Q}$ fölött?

10. Számítsuk ki a következő testbővítések fokait $\mathbb{Q}$ fölött!

a) $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ b) $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ c) $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4})$

11. Milyen q esetén irreducibilis az $f(x) = x^2 + x + 1$ polinom $\mathbb{F}_q$ fölött?

12. Hány elemű az $x^6 - 2$ polinom felbontási teste $\mathbb{Z}_5$, illetve $\mathbb{Z}_7$ fölött?

13. a) Hány elemű résztestei vannak egy 64, illetve egy 32 elemű testnek?

b) Hány ötödfokú irreducibilis polinom van $\mathbb{Z}_2[x]$-ben? (Útmutatás: mindegyiknek a gyökei elemei a 32 elemű testnek.)

14. a) Írjuk le $\mathbb{F}_8 \cong \mathbb{F}_2(\alpha)$ és $\mathbb{F}_9 \cong \mathbb{F}_3(\beta)$ elemeit az α, illetve β kis fokú polinomjaként, és adjuk meg a testek szorzástábláját, ha α az x^3+x+1, és β az x^2+1 polinom gyöke.

b) Keressünk $\mathbb{F}_9$-ben olyan elemet, amely

b1) generálja az $\mathbb{F}_9^\times \cong Z_8$ multiplikatív csoportot;

b2) nem generálja az $\mathbb{F}_9^\times$ csoportot, de generálja az $\mathbb{F}_9$ testet.

15. Faktorizáljuk az $f(x) = x^5 + x^2 - x + 1 \in \mathbb{F}_3[x]$ polinomot a Berlekamp-algoritmussal.