1. *Legyen $g = (134)(265)(78)$, $h = (3682)$, $k = (1234567)$. Számítsuk ki*
a) a k^2, k^3, h^2, gh, h^{-1}, $h^{-1}gh$ elemeket;
b) g, h, k és gh rendjét;
c) az $I(g)$, $I(h)$, $I(gh)$ inverziószámokat!

Megoldás: a) $k^2 = (1357246)$, $k^3 = (1473625)$, $h^2 = (38)(62)$, $gh = (16534)(287)$, $h^{-1} = (2863)$, $h^{-1}gh = (164)(27)(385)$

b) A diszjunkt ciklusok szorzataként való felírásból: $o(g) = [3, 3, 2] = 6$, $o(h) = 4$, $o(k) = 7$, $o(gh) = o((16534)(287)) = [5, 3] = 15$.

c) g az 12345678 számsorozatot a 36412587 sorozatba viszi, és ebben az inverzióban levő párok (ahol a nagyobb szám előbb jön, mint a kisebbik) száma 9, így $I(g) = 9$.
A h-hoz az 12345678 elemek 13645872 permutációja tartozik. $I(h) = 9$.
gh az 12345678 sorozatot a 68413527 sorozatba viszi, $I(gh) = 16$. Láthatjuk, hogy $I(gh) \equiv I(g) + I(h) \pmod 2$, de $I(gh) \neq I(g) + I(h)$.

2. *a) Hányadrendű elemek vannak S_3-ban, S_4-ben, S_5-ben?*
b) $G = S_3$-ra és $G = S_4$-re a $|G|$ milyen d osztójára van G-nek d-edrendű részcsoportja, illetve ciklikus részcsoportja?

Megoldás: a) Mivel a rend csak a diszjunkt ciklusokra bontásban szereplő ciklusok hosszától függ, elég azt megnézni, hogy n-et ($n = 3, 4, 5$-re) hogyan lehet pozitív egészek összegére bontani, és hogy az olyan hosszúságú diszjunkt ciklusok hossza hányadrendű.
$3 = 3 = 2 + 1 = 1 + 1 + 1$, és az ezekhez tartozó rendek 3, 2 és 1.
$4 = 4 = 3 + 1 = 2 + 2 = 2 + 1 + 1 = 1 + 1 + 1 + 1$, és a rendek 4, 3, 2 (és megint 2) és 1.
$5 = 5 = 4 + 1 = 3 + 2 = 3 + 1 + 1 = 2 + 2 + 1 = 2 + 1 + 1 + 1 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1$, a rendek pedig 5, 4, 6, 3, 2 és 1.

b) Egy ciklikus részcsoport rendje a generáló elem rendje, tehát az a) részből tudjuk, hogy S_3-ben csak 1, 2 és 3 lehet a ciklikus részcsoportok rendje, és 6-nak ezen kívül csak a 6 osztója. 6-odrendű részcsoport természetesen létezik, maga az S_3.
S_4-ben láttuk, hogy a ciklikus részcsoportok rendje 1, 2, 3, 4. Ezen kívül $|S_4| = 4! = 24$-nek osztója még a 6, 8, 12 és 24.
6-odrendű az S_3, amely benne van az S_4-ben (a 4-et helybenhagyó elemek épp az $\{1, 2, 3\}$ permutációi, de persze S_3-nak más izomorf példányai is benne vannak S_4-ben, tetszőleges számra az azt helyben hagyó permutációk).
S_4 tartalmazza D_4-et mint egy négyzet négy csúcsán ható egybevágósági csoportot, illetve a 4 hosszúságú körnek mint irányítatlan gráfnak az automorfizmuscsoportját.
12-elemű az alternáló csoport, 24-elemű a teljes S_4. Tehát itt is találtunk minden osztóhoz olyan rendű részcsoportot. (Ez általában nem igaz a csoportokra!)

3. *a) Hány tized- és negyedrendű elem van S_{10}-ben?*
b) Mi az elemek rendjének maximuma S_8-ban?

Megoldás: a) Egy 10-edrendű elem lehetséges ciklushosszai: 10, 5+2+1+1+1, 5+2+2+1.
Az első fajtából 9! van (a 10-ciklust felírhatjuk egyértelműen úgy, hogy az 1 legyen az elején, ekkor a többi elem 9!-féle sorrendben következhet a ciklusban.
Az 5-ciklus $\binom{10}{5} \cdot 4!$-féle lehet (megint feltehetjük, hogy a legkisebb számot rakjuk előre

a ciklusban, így egyértelmű lesz a ciklus felírása), és ehhez a 2-ciklus $\binom{5}{2}$-féle, tehát az $5+2+1+1+1$ felbontású elemek száma $\binom{10}{5}4!\binom{5}{2}$.
Végül a harmadik típusú permutációk száma $\binom{10}{5}4!\binom{5}{2}\binom{3}{2}$ lenne, de a két transzpozíciót kétféle sorrendben is írhatjuk (diszjunkt ciklusok felcserélhetők!), tehát az előbb minden permutációt kétszer számoltunk. Valójában az $5+2+2+1$ alakú permutációk száma $\frac{1}{2}\binom{10}{5}4!\binom{5}{2}\binom{3}{2}$.
Összesen $9!+\binom{10}{5}4!\binom{5}{2}+\frac{1}{2}\binom{10}{5}4!\binom{5}{2}\binom{3}{2}$ (azaz 514080 darab) 10-edrendű elem van S_{10}-ben.
A negyedrendűek nem 1 hosszúságú ciklushosszai: $4+4+2$, $4+4$, $4+2+2+2$, $4+2+2$, $4+2$, 4 (minden ciklus 1, 2 vagy 4 hosszú lehet, de kell köztük lennie 4-ciklusnak. Ezek száma $\binom{10}{4}3!\binom{6}{4}3!\cdot\frac{1}{2}+\binom{10}{4}3!\binom{6}{4}3!\cdot\frac{1}{2}+\binom{10}{4}3!\binom{6}{2}\binom{4}{2}\frac{1}{6}+\binom{10}{4}3!\binom{6}{2}\binom{4}{2}\frac{1}{2}+\binom{10}{4}3!\binom{6}{2}+\binom{10}{4}3!$ (azaz 209160).

b) Egyetlen ciklusból állónak maximum 8 lehet a rendje. Adott rendhez vegyük a legtöbb fixpontot tartalmazó, olyan rendű permutációt. Ekkor a ciklusok rendje páronként relatív prím, mert különben az m és n hosszú ciklus helyett, ahol $(m,n)=d>1$, vehetnénk egy m és n/d hosszú ciklust, és még néhány fixpontot, ezzel ugyanazt a rendet több fixpontú permutációval érnénk el. Ha van köztük két páratlan, akkor csak a $3+5$ felbontás lehet, és ennek az elemnek a rendje 15. Ha csak egy páratlan van, akkor emellett egyetlen páros lehet. A maximális, az elsőhöz relatív prím rendű párost választva a ciklusfelbontás csak $3+4$, illetve $5+2$ alakú lehet, ami 12, illetve 10 rendű permutációt ad. Tehát a maximális rend 15.

4. *Melyik az a legkisebb n, amelyre van S_n-ben 30-ad, 31-ed, 32-ed, illetve 33-ad rendű elem?*

Megoldás: Egy $30=2\cdot3\cdot5$ rendű permutáció ciklusfelbontásában kell lennie 2-vel, 3-mal és 5-tel osztható hosszúságú ciklusnak is (és minden ciklushossznak osztania kell a 30-at). Ezt $2+3+5$ felbontású permutációval el lehet érni, tehát S_{10}-ben van ilyen. S_9-ben viszont 5-tel osztható hosszúságú ciklus csak egy 5-ciklus lehet, emellett egy 3-mal osztható csak egy 3-ciklus, és akkor nem fér el már mellette egy páros hosszú ciklus. Tehát 30-hoz az $n=10$ a legkisebb.
31 prím, így egy ilyen rendű permutáció csak 31-ciklusokból állhat, ezért a minimális fok $n=31$.
$32=2^5$ csak úgy lehet a legkisebb közös többszöröse a ciklushosszaknak, ha mindegyik 2-hatvány, és van köztük 32, tehát $n=32$ a minimális fok.
$33=3\cdot11$ nyilván előállítható S_{14}-ben egy $3+11$ felbontású permutációval. Kisebb viszont nyilván nem elég, mert ott 33 hosszú ciklus nem fér el, tehát a 3-mal és a 11-gyel osztható hosszúságú két külön ciklus kell, hogy legyen, de ezek együtt legalább 14 elemet mozgatnak. Így a minimális fok $n=14$.

5. *Melyek azok a permutációk S_n-ben, amelyeknek az inverziószáma*
a) 1, *b)* $\binom{n}{2}$, *c)* $\binom{n}{2}-1$?

Megoldás: a) Ha egyetlen inverzió van, mondjuk $i<j$ kerül csak fordított sorrendbe a permutáció végrehajtása után, akkor csak $j=i+1$ lehet, ugyanis ha lenne $i<k<j$, akkor a k-t akárhova tennénk a $j\dots i$-hez képest, vagy i elé, vagy j után kerülne, így k valamelyikkel inverzióban lenne (ha közéjük tennénk, akkor mindkettővel). Tehát a kapott permutációban i és $i+1$ vannak megcserélve, és minden i-nel kisebb továbbra is

i (és $i+1$) előtt maradna, eredeti sorrendben, és minden $(i+1)$-nél nagyobb továbbra is $i+1$ és i mögött, ugyanígy eredeti sorrendben. Vagyis ez a permutáció az i és $i+1$ cseréje: $(i, i+1)$. Ilyenből pedig $n-1$ darab van.

b) Ez azt jelenti, hogy minden elempár inverzióban van, vagyis a permutáció teljesen megfordítja a rendezést: az $1, 2, \dots, n$ sorozatot az $n, n-1, \dots, 1$ sorozatba viszi. Eszerint egyetlen ilyen permutáció van. Ennek a ciklusfelbontása $(1, n)(2, n-1)(3, n-2)\cdots$.

c) Az a) részhez hasonlóan most egy pár kivételével mindennek inverzióban kell lennie. Ez azt jelenti, hogy ha előbb fordított sorrendbe rakjuk az elemeket, akkor ezen olyan permutációt kell végrehajtani, amely csak egy elempár egymáshoz viszonyított sorrendjét változtatja meg, azaz két (most) szomszédos elemet cserél fel. De a szomszéodk a megfordításnál is ugyanazok maradtak, tehát a szóbajöhető permutációk a b) és a) rész alapján $((1, n)(2, n-1)\cdots) \cdot (i, i+1)$.

Érdekes megnézni a c)-beli permutációk ciklusfelbontását is (diszjunkt ciklusok szorzatára). Ennek a permutációnak a ciklusfelbontása és rendje függ attól, hogy i közel van $n/2$-höz, vagy nem. Az első elem i-t és $(i+1)$-et nem mozgató transzpozícióit az elejére tehetjük, és $i < \frac{n-1}{2}$ vagy $i > \frac{n+1}{2}$ esetén az $i, i+1, n-i, n-i+1$ elemek mind különbözők, így a $g \cdot (i, n-i+1)(i+1, n-i)(i, i+1) = g \cdot (i, n-i+1, i+1, n-i)$ ciklusfelbontást kapjuk, ahol g transzpozíciók szorzata. Tehát ez egy negyedrendű elem.
Ha $n = 2k$, és $i = k$, akkor $g \cdot (k, k+1)(k, k+1) = g$ másodrendű.
Ha $n = 2k+1$ és $i = k$, akkor $g \cdot (k, k+2)(k, k+1) = g \cdot (k, k+2, k+1)$ hatod-, illetve $n = 3$ esetén harmadrendű.
Ha $n = 2k+1$, és $i = k+1$, akkor $g \cdot (k, k+2)(k+1, k+2) = g \cdot (k, k+1, k+2)$ ugyanígy hatod-, illetve harmadrendű.

6. *a) Minimálisan hány transzpozíció szorzataként lehet felírni S_n-ben egy olyan permutációt, amelynek a diszjunkt ciklusokra bontásában pontosan k ciklus van, az 1-ciklusokat is beszámítva?*

b) Ha egy permutációt $(1i)$ alakú transzpozíciók szorzataként akarunk felírni, maximálisan hány tényezőre van szükség?

Megoldás: a) Mivel minden m hosszú ciklust fel tudunk írni $m-1$ transzpozíció szorzataként ($(a_1, \dots, a_m) = (a_1a_2)(a_1a_3)\cdots(a_1a_m)$), összesen $n-k$ transzpozíció szorzataként fel tudjuk írni a permutációt.
Belátjuk, hogy ennél kevesebb nem elég. Ha egy g permutáció felírható m darab transzpozíció szorzataként, akkor $g \in H := \langle t_1, \dots, t_m \rangle$, ahol t_i-k transzpozíciók. Rajzoljuk fel egy n szögpontú gráfba a transzpozíciók hatását irányítatlan gráfként (a hurkokat kihagyhatjuk): összekötünk két elemet, ha valamelyik transzpozíció az egyiket a másikba viszi. Ekkor H elemei az alaphalmaz elemeit csak a gráf összefüggő komponensein belül mozgathatják (a transzpozíciók egymás utáni alkalmazása az élek mentén mozgat). Másrészt viszont a g ciklusai által mozgatott elemek közös komponensben vannak, mert g hatványai a ciklus bármelyik elemét elvihetik bármelyik másikba. Így a gráfnak legföljebb k összefüggő komponense lehet. Minden n_i szögpontú komponensben kell, hogy legyen legalább $n_i - 1$ él, így $m \geq \sum(n_i - 1) = n - k$.

b) Egy 1-et tartalmazó ciklusra $(1a_2 \dots a_m) = (1a_2)(1a_3)\cdots(1a_m)$, egy 1-et nem tartalmazóra $(a_1a_2\dots a_m)=(1a_1)(1a_2)\dots(1a_m)(1a_1)$, tehát $(n_1-1)+\sum_{i\geq 2}(n_i+1)$ biztosan elég, ahol n_1 az 1-et tartalmazó ciklus hossza, $n_2,n_3,\dots$ pedig a többi, legalább 2 hosszú ciklusok hossza.

Belátjuk, hogy ennél kevesebb nem is elég. Az a) részbeli gráf most egy csillaggráf az 1-gyel a középpontban. Nyilván minden mozgatott csúcsot össze kell kötni az 1-gyel, különben izolált pont lesz, és így nem lehet elmozgatni. Tehát az szorzatban minden ilyen $(1i)$ transzpozíció szerepel valahol. Ha g permutáció valamelyik ciklusában nem szerepel az 1, és minden i mozgatott pontjára a transzpozíciós előállításban csak egyszer szerepel az $(1i)$, akkor az utoljára (és egyetlen egyszer) szereplő i (itt $i\mapsto 1$) már nem tud visszatérni a saját ciklusába, ez ellentmondás. Ezért $(n_1-1)+\sum n_i$ tényező eleve kell, és emellett még az 1-et nem tartalmazó, 1-nél hosszabb ciklusokra egy-egy plusz tényező (egy-egy $(1i)$ második előfordulása) szintén szükséges.

Mivel a fenti összegben maximum $(n-1)/2$ darab n_i $(i\geq 2)$ fordulhat elő, a legnagyobb szükséges tényezőszám $n+(n-1)/2-1$ lehet, például $n=2k+1$-re $(23)(45)\cdots(2k,2k+1)$ felírása minimálisan $3k$ tényezőből áll: $(12)(13)(12)\cdot(14)(15)(14)\cdots(1,2k)(1,2k+1)(1,2k)$.

7. *Hány másod-, illetve negyedrendű elem van a kvaterniók között?*

Megoldás: $x=a+bi+cj+dk$-ra $x^2=a^2-b^2-c^2-d^2+2abi+2acj+2adk$, mert a képzetes rész vegyes tagjai kiesnek, pl. $bcij+cbji=bck-bck=0$. Ez csak úgy lehet 1, ha $ab=ac=ad=0$, amiből $a=0$ esetén $b^2+c^2+d^2=-1$ következik, de ez $b,c,d\in\mathbb{R}$ miatt lehetetlen, és így marad az, hogy $a\neq 0$, és $b=c=d=0$, vagyis $a^2=1$, és $x=\pm 1$. Ebből az 1 elsőrendű, így egyetlen másodrendű elem van, a -1.

Az előzőből következik, hogy minden negyedrendű elem négyzete -1, tehát az $a^2-b^2-c^2-d^2+2abi+2acj+2adk=-1$ egyenletet kell megoldani. Itt az $a\neq 0$ eset vezet ellentmondásra: $b=c=d=0$, $a^2=-1$ nem lehet. Tehát $a=0$, és $b^2+c^2+d^2=1$ esetén valóban $o(x)=4$. Vagyis végtelen sok negyedrendű elem van a kvaterniók között. (A negyedrendű x^4-1 polinomnak végtelen sok gyöke van!)

Hf1. *Hány* 6*-odrendű eleme van* S_7*-nek?*

Hf2. *Melyek azok a permutációk* S_n*-ben, amelynek az inverziószáma* 2*? Mi lehet ezeknek a permutációknak a rendje?*