**1.** *Legyenek $G$, $H$ csoportok, $a \in G$ és $b \in H$. Bizonyítsuk be, hogy*

*a) ha van olyan $\varphi : G \to H$ csoporthomomorfizmus, amelyre $\varphi(a) = b$, akkor $o(b) \mid o(a)$;*

*b) ha $G = \langle a \rangle$, és $o(b) \mid o(a)$, akkor van olyan $\varphi : G \to H$ homomorfizmus, amelyre $\varphi(a) = b$;*

*c) ha $G \neq \langle a \rangle$, akkor a b) állítás nem feltétlenül igaz (legyen $G = D_8$ diédercsoport, $H = Z_4$, és $o(b) = o(a) = 4$).*

*Megoldás:* Vegyük észre, hogy minden homomorfizmusra $\varphi(1) = 1$, ugyanis $\varphi(1)^2 = \varphi(1^2) = \varphi(1)$, és egyszerűsíthetünk $\varphi(1)$-gyel. Továbbá $\varphi(g^{-1}) = \varphi(g)^{-1}$, mert $\varphi(g)\varphi(g^{-1}) = \varphi(gg^{-1}) = \varphi(1) = 1$, és ugyanígy a másik sorrendben.
Legyen $o(a) = n$.

a) Ha $\varphi(a) = b$, akkor $b^n = \varphi(a)^n = \varphi(a^n) = \varphi(1) = 1 \Rightarrow o(b) \mid n$.

b) Definiáljuk a $\varphi : G \to H$ leképezést a $\varphi(a^k) = b^k$ összefüggéssel. Ez jól definiált, mert $a^k = a^\ell \Leftrightarrow a^{k-\ell} = 1 \Leftrightarrow n \mid k - \ell$, s mivel $o(b) \mid n$, ebből következik, hogy $o(b) \mid k - \ell$ $\Leftrightarrow b^{k-\ell} = 1 \Leftrightarrow b^k = b^\ell$. $\varphi$ műveletartó is: $\varphi(a^k \cdot a^\ell) = \varphi(a^{k+\ell}) = b^{k+\ell} = b^k \cdot b^\ell = \varphi(a^k)\varphi(a^\ell)$, tehát $\varphi$ valóban homomorfizmus, amely $a$-t $b$-be viszi.

c) A javasolt példa szerint legyen $\varphi : D_8 \to Z_4 = \langle b \rangle$, és $\varphi(f) = b$. $\varphi(t) \mid 2$ az a) rész szerint, tehát $\varphi(t) = b^2$ vagy 1. Így $b^{-1} = \varphi(f^{-1}) = \varphi(tft) = \varphi(t)b\varphi(t) = b$ mindkét esetben, ami ellentmond annak, hogy $o(b) = 4$.

**2.** *Hányadrendű lehet egy hatodrendű elem képe a következő homomorfizmusoknál:*

*a)* $Z_6 \to Z_{15}$ *b)* $Z_6 \to Z_{12}$ *c)* $Z_{12} \to Z_6$

*Megoldás:* Legyen mindegyikben $a$ az első, $b$ a második ciklikus csoport generátoreleme, és $\varphi$ egy homomorfizmus.

a) Az 1.a) feladat szerint $o(\varphi(a)) \mid 6$, másrészt a Lagrange-tétel következtében $o(\varphi(a)) \mid 15$, tehát $o(\varphi(a)) \mid (6, 15) = 3$. Ilyen elem $Z_{15}$-ben csak 3 van, a $\langle b^5 \rangle \cong Z_3$ részcsoport elemei. Ezek közül viszont bármelyikbe beleképezhető homomorfizmussal az $a$ az 1.b) feladat szerint, és az egyúttal $Z_{15}$-be menő homomorfizmus is lesz. Az $a$ képe meghatározza az $a$ összes hatványának a képét is, tehát pontosan három homomorfizmus van $Z_6$-ból $Z_{15}$-be.

b) Itt $x \mid 6$ a $Z_{12}$ hat $x$ elemére teljesül (a $\langle b^2 \rangle \cong Z_6$ részcsoport elemeire), tehát $\varphi(a)$ 6-féle lehet, és a $\varphi(a) = x$ feltételt kielégítő homomorfizmusok valóban léteznek is az 1.b) feladat szerint. Így hat $Z_6 \to Z_{21}$ homomorfizmus van.

c) Az előző két esethez hasonlóan az kell csak, hogy $\varphi \mid 12$ legyen, de ez $Z_6$ minden elemére teljesül (mert a rendjük osztója 6-nak is), ezért itt is hat homomorfizmus van.

**3.** *Legyen $|G| = 91$. Hány olyan $G \to G$ homomorfizmus van, ami $G$-nek legalább két, különböző rendű, az egységtől különböző elemét 1-be viszi?*

*Megoldás:* A Lagrange-tétel miatt $G$ minden eleme 1, 7, 13 vagy 91 rendű. Ha nincs benne 91 rendű elem, akkor a feladat feltételei szerint a két elem rendje $o(a) = 7$ és $o(b) = 13$. De akkor $a, b \in \operatorname{Ker} \varphi \Rightarrow 7, 13 \mid |\operatorname{Ker} \varphi| \Rightarrow 91 \mid |\operatorname{Ker} \varphi| \Rightarrow \operatorname{Ker} \varphi = G \Rightarrow \varphi \equiv 1$. Ha van benne 91 rendű, akkor $G \cong Z_{91}$, és az $a, b$ egyike lehet 91 rendű is, de akkor az generátorelem, tehát ha benne van $\operatorname{Ker} \varphi$-ben, akkor $\operatorname{Ker} \varphi = G$, különben pedig az előző okoskodás érvényes. Tehát egyetlen ilyen homomorfizmus van, az, amelyik minden elemet az 1-be visz.

**4.** *a) Adjuk meg az $a = (132)(45)$ permutációnak a $b = (254)$ permutációval vett konjugáltját, $b^{-1}ab$-t.*

*b) Melyek konjugáltak $S_6$-ban az $(1234)$ permutációval az $(123)$, $(4523)(16)$, $(4321)$ és $(24)(314)$ permutációk közül?*

*c) Hány különböző permutáció konjugálja $S_7$-ban az $(123)(45)(67)$ elemet önmagába? És a $(325)(61)(47)$ elembe? Konjugált-e a két elem $A_7$-ben is?*

*Megoldás:* a) $a^b := b^{-1}ab = (135)(24)$ (az $a$ ciklusfelbontásában minden elemet a $b$-nél vett képével helyettesítünk).

b) $S_n$-beli konjugálásnál az elem ciklusszerkezete megmarad (mármint az, hogy a diszjunkt ciklusok szorzataként való felírásban milyen hosszú ciklusból hány van), így $(123)$ és $(4523)(16)$ nem konjugált az $(1234)$-gyel.
Az azonos ciklusszerkezetűek viszont konjugáltak: a két permutációt megfelelő elrendezésben egymás alá írva leolvashatunk egy konjugáló permutációt, ami az $(1234)$-et $(4321)$-be viszi: az $1, 2, 3, 4$ sorozatot vigye a $4, 3, 2, 1$-be, azaz $(14)(23)$ ilyen konjugáló elem.
A negyedik elemnek nem a diszjunkt ciklusokra bontása van felírva, ezért azt még ki kell számolnunk: $(24)(314) = (1423)$, így ez is konjugált $(1234)$-gyel, pl. a $(234)$ permutáció konjugálja bele.

c) Tudjuk, hogy egy permutációnak a diszjunkt ciklusok szorzataként való felírása nem egyértelmű: a ciklusokat felcserélhetjük egymás között, továbbá minden ciklusnak az elforgatottjai is ugyanazt a ciklust definiálják. Tehát két azonos ciklusszerkezetű permutációra annyi különböző átkonjugáló elem van, ahányféleképpen a másodikat felírhatjuk úgy, hogy a ciklushosszak sorrendje megfeleljen az első permutáció felírásának Ebben az esetben egy 3-ciklus és két 2-ciklus szerepel a permutációban. (Ha lennének fixpontok, azokról se feledkezzünk meg, azokat is lehet cserélgetni egymással!) Ezeket úgy kell felírni, hogy elöl legyen a 3-ciklus, utána a két 2-ciklus, ahogy a kiinduló permutációban van. A lehetőségek száma $3! \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 24$ (3-, 2-, és 2-féle elforgatás, és a két 2-ciklus cseréje lehetséges egymástól függetlenül). Ezért $(123)(45)(67)$-ből önmagába, illetve $(325)(61)(47)$-be is 24-féleképpen lehet konjugálással eljutni.
Vegyünk egy átkonjugáló elemet $a = (123)(45)(67)$-ből $b = (325)(61)(47)$-be. Ebből a felírásból például a $g = (135)(46)$ elemre $a^g = b$, viszont ez páratlan permutáció: páratlan sok (egy darab) páros hosszúságú ciklusa van. Páros permutációt kapunk ebből, ha egy páratlannal megszorozzuk, például egy transzpozícióval. Ezt meg is tehetjük, ha $b$-n egy ilyen konjugálást végrehajtunk úgy, hogy $b$-t $b$-be vigye, pl. a $t = (61)$ cserét. Tehát a $h = gt = (135)(46)(61) = (13564)$ páros permutációval $a^h = a^{gt} = (a^g)^t = b^t = b$ lesz, következésképpen $a$ és $b$ az $S_7$ páros permutációiból álló $A_7$ alternáló csoportban is konjugáltak.

**5.** *Határozzuk meg a következő csoportok konjugáltosztályait és normálosztóit!*
$S_3$, $S_4$, $S_5$, $Q$, $D_8$, $D_{2n}$

*Megoldás:* Tudjuk, hogy a szimmetrikus csoportok konjugáltosztályai az azonos ciklusszerkezetű elemekből állnak. Így
$S_3$-ban $\{1\}$, $\{(..)\}$, $\{(...)\}$ a konjugáltosztályok
(az 1-ciklusokat itt nem jelöljük, és a pontok mutatják a ciklushosszakat),

$S_4$-ben $\{1\}$ $\{(..)\}$, $\{(...)\}$, $\{(..)(..)\}$, $\{(....)\}$,
$S_5$-ben $\{1\}$, $\{(..)\}$, $\{(...)\}$, $\{(..)(..)\}$, $\{(....)\}$, $\{(...)(..)\}$, $\{(.....)\}$.
A normálosztók a konjugálásra zárt részcsoportok, tehát azok a részhalmazok, amelyek teljes konjugáltosztályok uniói, és zártak a szorzásra is.
Minden $S_n$-ben normálosztó az 1, az $A_n$ és az $S_n$ maga. Az a kérdés, hogy van-e más ezekben a csoportokban. Tudjuk, hogy a transzpozíciók generálják $S_n$-t, tehát ha van a normálosztóban egyetlen transzpozíció is, akkor az csak a teljes $S_n$ lehet. Tegyük fel most, hogy $N \lhd S_n$ $(n = 3, 4, 5)$, és $N$ nem tartalmaz transzpozíciót. $S_3$-ban már csak az 1, és a $\{1, (...)\} = A_3$ jöhet szóba, és ezek valóban normálosztók.
$S_4$-ben a konjugáltosztályok mérete a harmadiktól kezdve: $8, 3, 6$, és az 1 mindegyik részcsoportban benne van, tehát 24-nek valamely osztóját legföljebb $1 + 3$ vagy $1 + 3 + 8$ formában kaphatjuk meg. Az első $\{1, (..)(..)\}$ valóban részcsoport is: bármely két különböző másodrendű elemének szorzata a harmadikat adja. Tehát ez egy 4-elemű normálosztó, a $V$ Klein-csoport. A második pedig az $A_4$. Tehát csak négy normálosztó van $S_4$-ben: $1, V, A_4, S_4$.
$S_5$-ben érdemes észrevenni, hogy $\{(...)\}$ kigenerálja a teljes $A_5$-öt: $(123)(234) = (13)(24)$, $(123)(345) = (12453)$ mutatja, hogy az összes páros permutációhoz tartozó ciklus-szerkezetet megkaphatjuk szorzatként (és akkor persze a generált normálosztóban a teljes konjugáltosztályuk is benne lesz). Másrészt $(12)(34) \cdot (12)(45) = (354)$ miatt $\{(..)(..)\}$ és $(12345)(32145) = (354)$ miatt $\{(.....)\}$ is kigenerálja normálosztóként az $A_5$-öt. Ha egy $(...)(..)$ alakú elem van a normálosztóban, akkor ennek négyzeteként 3-ciklus is kerül bele, és azzal együtt az $A_5$-nél nagyobbat generálnak, tehát az egész $S_5$-öt. Végül $\{(....)\}$ négyzete is kigenerálja normálosztóként a korábbiak alapján az $A_5$-öt, és együtt az $S_5$-öt is. Tehát $S_5$ normálosztói 1, $A_5$ és $S_5$.

$Q$-ban a negyedrendű elemek centralizátora az általuk generált részcsoport: $g \in \{\pm i, \pm j, \pm k\}$ esetén $C_G(g) \geq \langle g \rangle$ nyilvánvaló, és nem lehet a teljes csoport, mert $i$, $j$, $k$ páronként nem felcserélhetők. Így ezeknek a konjugáltosztálya $8/4 = 2$ elemű: $\{\pm i\}$, $\{\pm j\}$, $\{\pm k\}$ (ugyanis $j^{-1}ij = (-j)ij = -(-k)j = kj = -i$, és hasonlóan a többi). Az 1 és $-1$ mindennel felcserélhetők, ezért a konjugáltosztályuk egyelemű. Az összes konjugáltosztály: $\{1\}$, $\{-1\}$, $\{\pm i\}$, $\{\pm j\}$, $\{\pm k\}$. Mivel minden elem csak az inverzével konjugált, az összes részcsoport normálosztó is. Tehát a normálosztók 1, $\langle -1 \rangle$, $\langle i \rangle$, $\langle j \rangle$, $\langle k \rangle$, $Q$.

$D_{2n}$-ben minden forgatás centralizátora tartalmazza az $\langle f \rangle$ kettő indexű részcsoportot, nagyobb pedig csak akkor lehet, ha a forgatás a $t$ tükrözéssel is felcserélhető, azaz, ha $f^k = tf^kt = f^{-k}$, vagyis páros $n$-re csak az $f^{n/2}$, páratlanra nincs ilyen nem triviális forgatás. Így a többi forgatás legfeljebb 2-elemű konjugáltosztályokban van, 2 elem meg valóban van bennük: $t^{-1}ft = tft = f^{-1}$. Viszont $f^{-1}tf = tt^{-1}f^{-1}tf = t(t^{-1}ft)^{-1}f = t(f^{-1})^{-1}f = tff = tf^2$, és tovább konjugálva $f$-fel megkapjuk a $tf^4, tf^8, \ldots$ elemeket is, így a $t$ konjugált osztálya páros $n$ esetén legalább $n/2$ elemű, páratlan esetén legalább $n$ elemű, és ugyanez igaz $tf$-re is. Másrészt páros $n$-re $f^{n/2} \in Z(D_{2n}) \leq C_G(t)$, ezért a tükrözések centralizátora legalább 4-elemű, következésképpen a konjugáltosztályuk pontosan $n/2$-elemű, páratlanra meg nincs is más lehetőség, mint hogy az $n$ tükrözés alkotja a konjugáltosztályt. Összefoglalva, a konjugáltosztályok $D_{2n}$-ben:
$\{1\}$, ($\{f^{n/2}\}$, ha $n$ páros), $\{f^k, f^{-k}\}$ $(k = 1, 2, \ldots, [(n-1)/2])$,

és páros $n$-re: $\{\, tf^{2k} \mid 0 \le k < n/2 \,\}$, $\{\, tf^{2k+1} \mid 0 \le k < n/2 \,\}$,
páratlan $n$-re pedig $\{\, tf^{k} \mid 0 \le k < n \,\}$.
Ami $D_{2n}$ normálosztóit illeti, láttuk, hogy a tükrözések $n/2$ vagy $n$ elemű konjugáltosztályokban vannak, és kigenerálják az $f^2$-et, így a forgatásoknak is a felét vagy az összeset. Tehát $D_n$ minden olyan normálosztója, amely tartalmaz tükrözést legföljebb 2 indexű. A páros esetben $\langle f^2, t\rangle$ és $\langle f^2, ft\rangle$ valóban normálosztók, és $D_n$-nel izomorf részcsoportot generálnak (a szabályos $n$-szögbe kétféleképpen rajzolhatunk be egy szabályos $n/2$-szöget, minden második csúcsot megtartva, és azokat az egybevágóságokat tartjuk meg, amelyek az egyik, illetve másik szabályos $n/2$-szöget önmagukba viszik). A páratlan esetben ilyen normálosztó csak a teljes $D_{2n}$ lehet. A tükrözést nem tartalmazó normálosztók mind részcsoportjai $\langle f\rangle \cong Z_n$-nek, $\langle f\rangle$ minden részcsoportja normálosztó, ugyanis $\langle f^k\rangle$ zárt az $f$-fel és a $t$-vel való konjugálásra, és így a $D_{2n}$ tetszőleges elemével való konjugálásra is. Tehát minden $d \mid n$-re van egy $Z_d$-vel izomorf normálosztó is, $\langle f^{n/d}\rangle$.
Speciálisan $D_8$-ra 5 konjugáltosztályt: $\{1\}$, $\{f^2\}$, $\{f, f^{-1}\}$, $\{t, tf^2\}$, $\{tf, tf^3\}$ találunk, a normálosztók pedig $1$, $\langle f^2\rangle$, $\langle f\rangle$, $\langle f^2, t\rangle$, $\langle f^2, tf\rangle$, $D_8$.

**6.** *a) Bizonyítsuk be, hogy $Z(S_n) = 1$, ha $n \ge 3$.*
*b) Határozzuk meg a $D_{2n}$ diédercsoport centrumát.*

*Megoldás:* a) Legyen $1 \ne g \in S_n$. Ekkor vannak olyan $i, j, k \in \{1, \dots, n\}$ különböző elemek, hogy $ig = j$. Legyen $h = (jk)$. Ekkor $g^h : ih \mapsto jh$, azaz $i \mapsto k$, emiatt $g \ne g^h$, ami mutatja, hogy $g \notin Z(S_n)$.
b) Mivel $t^{-1}f^k t = (t^{-1}ft)^k = f^{-k}$, egy $f^k$ forgatás csak akkor lehet a centrumban, ha $f^{2k} = 1$, azaz $n \mid 2k$. Tehát a centrumban a forgatások közül páratlan $n$-re csak az 1, páros $n$-re emellett az $f^{n/2}$ van. Az utóbbi valóban minden elemmel felcserélhető, mert $t^{-1}f^{n/2}t = f^{-n/2} = f^{n/2}$, és $f^{-1}f^{n/2}f = f^{n/2}$, és így a $D_{2n} = \langle f, t\rangle$ minden eleme is önmagába konjugálja. $t$ viszont $n \ge 3$ esetén nem cserélhető fel $f$-fel, mert $t^{-1}ft = f^{-1} \ne f$, és így $tf^k$ sem. Tehát $Z(D_{2n}) = 1$, ha $n \ge 3$ páratlan, és $\{1, f^{n/2}\}$, ha $n \ge 4$ páros.

**7.** *Hány konjugáltja van az $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ elemeken ható $S_5$-nek, illetve a $H = \langle(12345)\rangle$ részcsoportnak $S_7$-ben? Határozzuk is meg a két részcsoport normalizátorát!*

*Megoldás:* Tudjuk, hogy a részcsoport konjugáltjainak száma a normalizátorának az indexe.
Ha $g \in N_{S_7}(S_5)$, akkor $S_5$ minden elemét, így az $(12345)$ ciklust is csak olyan permutációba konjugálhatja, amelynek fixpontja marad a 6 és a 7, tehát a 6-ot és a 7-et vagy helyben hagyja, vagy felcseréli. Így $N_G(S_5) \subseteq \{\, h, h(67) \mid h \in S_5 \,\}$. Az ilyen elemek viszont valóban normalizálják $S_5$-öt, mert maga $S_5$ nyilván normalizálja, és $(67)$ még centralizálja is. Tehát a normalizátor $\{\, h, h(67) \mid h \in S_5 \,\}$, ennek elemszáma pedig $2 \cdot 5!$, így az $S_5$ konjugáltjainak a száma $7!/(2 \cdot 5!) = 7 \cdot 6/2 = 21$.
Legyen $a = (12345)$, és $H\langle a\rangle$. Tetszőleges $g \in S_7$-re $H^g$ is ötelemű ciklikus csoport, amelynek generátora $(12345)^g$. Így minden olyan részcsoport konjugált $H$-val, amelyet egy 5-ciklus generál. 5-ciklusokból $\binom{7}{5} \cdot 4! = 21 \cdot 4!$ van, de négyenként ugyanazt a részcsoportot generálják, tehát a $H$ konjugáltjainak száma $21 \cdot 4!/4 = 126$.
$H$ normalizátorában azok a permutációk vannak, amelyek az $a$-t valamelyik (5-ödrendű) hatványába konjugálják. Mivel ezek szintén egyetlen 5-ciklusból állnak, ezekbe valóban

át lehet konjugálni, mégpedig annyiféleképpen, ahányféleképpen felírhatjuk annak az 5-ciklusnak a teljes ciklusfelbontását (az 1-ciklosokat is kiírva): $5 \cdot 2 = 10$ (az 5-ciklust elforgathatjuk, és a két fixpontot felcserélhetjük). Tehát $|N_G(H)| = 10 \cdot 4 = 40$ (ellenőrzés: $40 \cdot 126 = 5040 = 7!$).
$N_G(H)$-ban nyilván benne van $H$, továbbá van egy olyan elem, ami (12345)-öt a négyzetébe, (13524)-be konjugálja, pl. (2354), továbbá (67) is normalizálja (sőt centralizálja) $H$-t. $\{(12345), (2354), (67)\}$ már kigenerálja a teljes 40-elemű normalizátort, ugyanis $b = (2345)$ és $c = (67)$ felcserélhetősége miatt $\langle b, c\rangle = \langle b\rangle\langle c\rangle$, és ennek elemszáma $\frac{|\langle b\rangle| \cdot |\langle c\rangle|}{|\langle b\rangle \cap \langle c\rangle|} = \frac{4 \cdot 2}{1} = 8$, tehát $8 \mid |\langle a, b, c\rangle|$, másrészt $5 = o(a) \mid |\langle a, b, c\rangle|$, így $40 \mid \langle a, b, c\rangle$.
Tehát $N_{S_7}(H) = \langle(12345), (2354), (67)\rangle$.

**Hf1.** *Legyenek $A$ és $B$ a $G$ csoport részcsoportjai, és tegyük föl, hogy $A$ és $B$ kommutatívak, és $G = AB$. Bizonyítsuk be, hogy $A \cap B$ normálosztója $G$-nek.*

**Hf2.** *Bizonyítsuk be, hogy két konjugáltosztály komplexusszorzata zárt a konjugálásra, azaz teljes konjugáltosztályok uniója. Hány konjugáltosztályra bomlik $S_5$-ben a $\mathcal{K}_1\mathcal{K}_2$ komplexusszorzat (milyen ciklusfelbontású elemek vannak benne), ha $\mathcal{K}_1$ a 3-ciklusok, $\mathcal{K}_2$ pedig a 2-ciklusok konjugáltosztálya?*