1. *Van-e S_n-ben $n!/3$ elemű konjugáltosztály, ha $n \geq 5$?*

Megoldás: Ha g konjugáltosztálya $n!/3$ elemű, akkor $|C_G(g)| = 3$, s mivel $g \in C_G(g)$, g is csak harmadrendű lehet. De akkor g ciklusfelbontásában csak 3-ciklusok és fixpontok vannak. $n \geq 5$ esetén vagy $g = (abc)(d)(e)\ldots$, így a másodrendű $(de) \in C_G(g)$, vagy $g = (abc)(def)\ldots$, így $(ad)(be)(cf) \in C_G(g)$, és ez mindkét esetben azt jelentené, hogy $2 \mid |C_G(g)|$, ami ellentmondás. Tehát nincs $n!/3$ elemű konjugáltosztály. (Mellesleg $n = 3, 4$-re van, a 3-ciklusok pont ennyien vannak.)

2. *Határozzuk meg a következő normálosztókkal vett faktorcsoportokat!*

a) $G = GL_n(K)$, $N = SL_n(K)$, *ahol* $GL_n(K)$ *az invertálható,* $SL_n(K)$ *az* 1 *determinánsú,* K *fölötti,* $n \times n$*-es mátrixok csoportja;*

b) $G = D_4$, $N = \langle f^2 \rangle$;

c) $G = (\mathbb{R}, +)$, $N = \mathbb{Z}$;

d) $G = \mathbb{Q}^\times$, $N = \{\pm 1\}$.

Megoldás: a) $SL(n, K)$ a $\det : GL(n, K) \to K^\times$ homomorfizmus magja, s mivel ez a homomorfizmus szürjektív, a homomorfizmustétel szerint $GL(n, K)/SL(n, K) = GL(n, K)/\operatorname{Ker}\det \cong \operatorname{Im}\det = K^\times$.

Másképp: Teljes reprezentánsrendszert alkotnak azok diagonális a mátrixok, amelyeknek bal felső sarkában tetszőleges $c \neq 0$ elem áll, és a többi diagonális elem 1. Ez részcsoport is, és izomorf $K^\times$-val, tehát a faktorcsoport is $K^\times$-val izomorf.

b) $|G/N| = 8/2 = 4$, és G/N-ben minden elem 2 vagy 1 rendű, mert a G-ben is csak f és az inverze nagyobb rendű ennél, de azoknak a négyzete már N-ben van, vagyis $(Nf)^2 = N$ és $(Nf^{-1})^2 = N$. Így G/N a két lehetséges negyedrendű csoport közül $\mathbb{F}_2^2$-vel izomorf.

c) A $[0, 1)$ intervallum elemei teljes reprezentánsrendszert adnak (minden $x \in \mathbb{R}$ osztályában benne van az $\{x\} = x - [x]$, de két különböző, $[0, 1)$-beli szám különbsége nem egész), tehát a faktorcsoport a $[0, 1)$-gyel izomorf, amelyen a műveletet a mellékosztályok összeadásának megfelelően az $a \dot{+} b := \{a + b\}$ képlettel definiáljuk.

Mellesleg ezzel izomorf multiplikatív csoportot alkotnak az 1 abszolút értékű komplex számok: izomorfizmust ad az $x \mapsto \cos(2\pi x) + i \sin(2\pi x)$ leképezés.

d) A pozitív racionális számok teljes reprezentánsrendszert adnak (minden mellékosztály kételemű, $\{\pm r\}$ alakú), s mivel ezek csoportot is alkotnak a szorzásra nézve, ezzel a csoporttal lesz izomorf a faktorcsoport.

3. *Határozzuk meg a G csoport N normálosztója szerinti faktorában a $\bar{g}$ elem képének rendjét, ha*

a) $G = Q$, $N = \langle i \rangle$, $g = j$;

b) $G = \mathbb{Z}_{33}^*$, $N = \langle 10 \rangle$, $g = 7$.

Megoldás: Azt kell megnézni, hogy melyik a g-nek a legkisebb olyan hatványa, amely N-be esik (és persze a rend osztója $|G/N|$-nek, tehát nem feltétlenül kell minden hatványt kiszámolni).

a) $j^2 = -1 \in N$, de $j \notin N$, így $o(\bar{j}) = 2$.

b) $N = \{10, 1\}$, és $|\mathbb{Z}_{33}^*| = \varphi(33) = 20$, így $|G/N| = 10$, tehát a rend csak $1, 2, 5$ vagy 10 lehet. $7^2 = 49 = 16$, $7^4 = 16^2 = 256 = -8$, $7^5 = -56 = 10 \in N$, tehát $o(\bar{g}) = 5$.

4. *Legyen $N \triangleleft G$, $H \leq G$, $|G| = 24$, $|N| = 4$, és $|H| = 6$. Hány elemű lehet H képe a $G \to G/N$ homomorfizmusnál? Adjunk is példát mindegyik esetre!*

Megoldás: H képe $NH/N \cong H/(N \cap H)$, így az elemszáma $|H|/|N \cap H|$. Mivel $|N \cap H|$ osztója $|N| = 4$-nek és $|H| = 6$-nak is, osztója $(4, 6) = 2$-nek, vagyis $|N \cap H| = 1$ vagy 2, így H képe 6 vagy 3 elemű. Mind a két eset előfordulhat: S_4-ben $N = V = \langle(..)(..)\rangle$ és $H = S_3$ esetén H képe 6 elemű, mert $V \cap S_3 = 1$, viszont $G = \langle a\rangle \cong Z_{24}$-ben $N = \langle a^6\rangle$ 4 elemű, $H = \langle a^4\rangle$ 6 elemű, viszont $(a^4)^3 = a^{12} \in N$, ezért $o(\overline{a^4}) = 3$, így az általa generált $\overline{H}$ csoport is csak 3 elemű lehet.

5. *Határozzuk meg Q és D_8 faktorcsoportjait! Hány homomorfizmus van Q-ból D_8-ba, illetve D_8-ból Q-ba?*

Megoldás: Q-nak minden részcsoportja normálosztó, és az 1 és a teljes Q mellett az egyetlen másodrendű $\langle -1\rangle$ normálosztóval vett faktorcsoport olyan negyedrendű csoport, amelynek minden eleme 1 vagy 2 rendű ($i^2 = j^2 = k^2 = -1 \in \langle -1\rangle$), így csak $\mathbb{F}_2^2$-vel lehet izomorf. A negyedrendű normálosztókkal ($\langle i\rangle$, $\langle j\rangle$, $\langle k\rangle$) vett faktorcsoport pedig másodrendű, így Z_2-vel izomorf.

Itt is csak az a kérdés, hogy mik lehetnek a negyedrendű faktorcsoportok, ha vannak ilyenek. A 4/6. feladatban láttuk, hogy D_8-nak $\langle f^2\rangle$ az egyetlen másodrendű normálosztója. Az ezzel vett faktorcsoport megint olyan negyedrendű csoport, amelyben nincs 4-edrendű elem: f^2 és $(f^{-1})^2$ is benne van a normálosztóban, a többi elem meg eleve másodrendű. Így $Q/\langle -1\rangle \cong \mathbb{F}_2^2$. Vannak másodrendű faktorcsoportok is, az $\langle f\rangle$-fel, $\langle f^2, t\rangle$-vel és a $\langle f^2, tf\rangle$-fel faktorizálva is Z_2-t kapunk. és természetesen az 1 és a D_8 is faktorcsoport.

A homomorfizmusok megkereséséhez használjuk a homomorfizmustételt: $\varphi : G \to H$ esetén $G/\operatorname{Ker}\varphi \cong \operatorname{Im}\varphi \leq H$.

Mivel $D_8 \ncong Q$, a mag egyik irányban sem lehet 1. Ha $|\operatorname{Ker}\varphi| = 2$, akkor az előző rész alapján $G/\operatorname{Ker}\varphi \cong \mathbb{F}_2^2$ mindkét esetben. De Q-nak nincs ilyen részcsoportja (összesen is csak egy másodrendű eleme van), így ilyen homomorfizmus nincs D_8-ból Q-ba. Fordítva: D_8-ban két olyan részcsoport is van, amely $\mathbb{F}_2^2$-vel izomorf. Csak azt kell megszámolni, hogy hány $\mathbb{F}_2^2 \to \mathbb{F}_2^2$ izomorfizmus van. Ezt lineáris algebrából is tudjuk: annyi, ahány 2×2-es invertálható mátrix van $\mathbb{F}_2$ fölött, azaz $(2^2 - 1)(2^2 - 2) = 6$. Így $2 \cdot 6$ olyan homomorfizmust kapunk Q-ból D_8-ba, ahol $\operatorname{Im}\varphi$ 4 elemű.

A kételemű képek a másodrendű ciklikus részcsoportok, és $Z_2 \to Z_2$ izomorfizmusból csak egy van, tehát csak azt kell összeszámolni, hogy hányféle 2-elemű faktorcsoportból hányféle kételemű részcsoportba mehetünk. $D_8 \to Q$ esetén ez $3 \cdot 1 = 3$, $Q \to D_8$ esetén $3 \cdot 5 = 15$. Végül vannak az $\equiv 1$ homomorfizmusok.

Összesítve: $D_8 \to Q$ homomorfizmusból $0 + 0 + 3 + 1 = 4$ van, míg
$Q \to D_8$ homomorfizmusból $0 + 12 + 15 + 1 = 28$.

6. *Lássuk be, hogy minden $d \mid n$-re van a D_{2n}-nek D_{2d}-vel izomorf részcsoportja és faktorcsoportja is.*

Megoldás: Legyen f az $\frac{2\pi}{n}$ szögű forgatás és t egy tükrözés. Ekkor $\langle f^{n/d}, t\rangle \cong D_{2d}$ (tekinthetjük úgy, hogy a szabályos n-szög minden $\frac{n}{d}$-edik csúcsát kijelölve rögzítünk d csúcsot, és csak az így kapott d-szöget önmagába vivő egybevágóságokat nézzük). Másrészt

$N = \langle f^d \rangle$ normálosztó D_{2n}-ben, és a vele vett faktorcsoport $G/N = \langle \overline{f}, \overline{t} \rangle \cong D_{2d}$, mert $o(\overline{f}) = d$, és $\overline{t}^{-1}\overline{f}\overline{t} = \overline{f}^{-1}$ meghatározza izomorfia erejéig a diédercsoportot.

7. *Hány elemű S_3 és Q automorfizmuscsoportja, illetve belső automorfizmuscsoportja?*

Megoldás: G belső automorfizmusai a G elemeivel való konjugálások, de ezek közül azonosan hatnak azok, amelyek $Z(G)$-nek ugyanabban a mellékosztályában vannak: $g \in g$, $z \in Z(G)$-re $x^{zg} = g^{-1}z^{-1}xzg = g^{-1}xg = x^g$. Tehát a belső automorfizmusok csoportja izomorf $G/Z(G)$-vel. Esetünkben ez $S_3/Z(S_3) = S_3/1 = S_3$, illetve $Q/Z(Q) = Q/\langle -1 \rangle \cong \mathbb{F}_2^2$, tehát $|\operatorname{Inn} S_3| = 6$ és $\operatorname{Inn} Q| = 4$.
Nyilvánvaló, hogy $\operatorname{Inn} G \leq \operatorname{Aut} G$ (sőt, $\operatorname{Inn} G \triangleleft \operatorname{Aut} G$ is igaz). Másrészt S_3 minden automorfizmusát meghatározza két generátorelemének, mondjuk, (12)-nek és (123)-nak a képe. Mivel az automorfizmus megőrzi az elemrendet, (12) csak 3-féle, (123) csak kétféle helyre mehet, így $|\operatorname{Aut} S_3| \leq 3 \cdot 2 = 6$, viszont már $\operatorname{Inn} S_3$ is 6-elemű, tehát $\operatorname{Aut} S_3 = \operatorname{Inn} S_3 \cong S_3$.
Q automorfizmusait meghatározza az i és j képe, amelyek csak a negyedrendű elemekből, $\{\pm i, \pm j, \pm k\}$-ból kerülhetnek ki. Vegyük észre, hogy ha i képe φ-nél akármelyik ezek közül, j képe pedig a $\{\pm i, \pm j, \pm k\} \setminus \{\pm\varphi(i)\}$ (nyilván nem eshet egybe $\varphi(i)$-vel vagy $\varphi(-i)$-vel), akkor $\varphi(i)$, $\varphi(j)$ és $\varphi(i)\varphi(j)$ kielégítik az i, j, k-ra érvényes szorzási szabályokat, tehát ezt kiterjesztve automorfizmust kapunk Q-ból Q-ba. Ez azt jelenti, hogy $|\operatorname{Aut}(Q)| = 6 \cdot 4 = 24$.

8. *Bizonyítsuk be, hogy A_6 egyszerű!*

Megoldás: A_6-ban az elemek ciklusszerkezete 1, (..)(..), (...), (...)(...), (....)(..), (.....), és az ezek által alkotott S_6-beli konjugáltosztályok közül csak (.....) hasad szét A_6-ban (csupa különböző hosszúságú, páratlan hosszú ciklusa van: 5+1 a felbontás).Számoljuk össze az egyes konjugáltosztályok elemszámát.

$$|\mathcal{K}_1| = 1,\ |\mathcal{K}_2| = 45,\ |\mathcal{K}_3| = 40,\ |\mathcal{K}_4| = 40,\ |\mathcal{K}_5| = 90,\ |\mathcal{K}_6| = |\mathcal{K}_7| = 72$$

Ha van nem triviális normálosztó, az ezek közül néhánynak az uniója úgy, hogy csoportot is alkosson, következésképpen az unió elemszám osztója kell, hogy legyen $|A_6| = 360$-nak. Az 1-et mindenképpen tartalmaznia kell, és még legalább egy másik konjugáltosztályt $\Rightarrow$ $|N| \geq 1 + 40 \Rightarrow |N| = 45,\ 60,\ 72,\ 90,\ 120,\ 180$. De $1 + |\mathcal{K}_i|$-ként ilyet nem kapunk, tehát legalább 3 konjugáltosztály kell, ezért $|N| \geq 81 \Rightarrow |N| \geq 90$, így $10 \mid |N|$. 10-zel oszthatót viszont csak úgy tudunk összerakni, hogy $1 + 45 + 72 + 72 + \ldots = 190 + \ldots$, így $|N| = 360$, vagyis az N szükségképpen a teljes A_6. Ezzel beláttuk, hogy A_6 egyszerű.

Hf1. *Bizonyítsuk be, hogy $\{(1234), (123)\}$ generálja S_4-et.*

Hf1. *Legyen N normálosztó, H pedig egy részcsoport a 100-adrendű G csoportban. Bizonyítsuk be, hogy ha $|N| = 20$ és $|H| > 20$, akkor H-nak van 5 indexű részcsoportja!*