*Általánosítsuk a belső és külső direkt szorzatot k tagra:*

*Belső:* $G = \prod_{i=1}^{k} N_i \Leftrightarrow N_i \lhd G\ \forall i, \quad G = N_1 \cdots N_k, \quad N_i \cap (N_1 \cdots N_{i-1} N_{i+1} \cdots N_k) = 1\ \forall i$

*Külső: $G_i$ csoportokra $\prod_{i=1}^{k} G_i$ a $G_i$-k Descartes-szorzata a komponensenkénti szorzással*

*Az utóbbi is tekinthető belsőnek, ha $G_i$-t azonosítjuk az $1 \times 1 \times \cdots G_i \times 1 \times \cdots \times 1$ részcsoporttal.*

**1.** *Bizonyítsuk be, hogy $N_i \lhd G$-re $G = \prod_{i=1}^{k} N_i \Leftrightarrow G$ minden $g$ eleme egyértelműen írható $g = n_1 \cdots n_k$ alakban, ahol $n_i \in N_i$, $i = 1, \ldots, k$.*

*Megoldás:* $\Rightarrow$: Az $N_1 \cdots N_k = G$ feltétel miatt minden elem felírható $n_1 \cdots n_k$ alakban. Ha $n_1 \cdots n_k = n'_1 \cdots n'_k$ két ilyen felírás, és az $i$. helyen van az első eltérés, akkor $n_i \cdots n_k = n'_i \cdots n'_k \Rightarrow 1 \neq (n'_i)^{-1} n_i = (n'_{i+1} \cdots n'_k)(n_{i+1} \cdots n_k)^{-1} \in N_i \cap \langle N_{i+1}, \ldots, N_k \rangle \leq N_i \cap (N_1 \cdots N_{i-1} N_{i+1} \cdots N_k) = 1$, ellentmondás.
$\Leftarrow$: Az előállíthatóságból következik, hogy $G = N_1 \cdots N_k$. Másrészt ha $g \in N_i \cap (N_1 \cdots N_{i-1} N_{i+1} \cdots N_k)$, akkor $g = 1 \cdots 1 \cdot n_i \cdot 1 \cdots 1 = n_1 \cdots n_{k-1} \cdots 1 \cdots n_{k+1} \cdots n_k$ két előállítás, és ezeknek meg kell egyezniük, így $g = n_i = 1$.

**2.** *Bizonyítsuk be, hogy ha $A, B \lhd G$, és $A \cap B = 1$, akkor minden $a \in A$, $b \in B$ elemre $ab = ba$.*

*Megoldás:* $(ba)^{-1}ab = a^{-1}b^{-1}ab = (b^{-1})^a b \in B$, és $(ba)^{-1}ab = a^{-1}b^{-1}ab = a^{-1}a^b \in A$, mivel $B$ és $A$ is normálosztók. De akkor $(ba)^{-1}(ab) \in A \cap B = 1 \Rightarrow (ba)^{-1}(ab) = 1 \Rightarrow ab = ba$.

**3.** *Lássuk be, hogy ha $G = \prod_{i=1}^{k} N_i$, és $g = n_1 \ldots n_k$, ahol $n_i \in N_i$, akkor $o(g) = [o(n_1), \ldots, o(n_k)]$.*

*Megoldás:* $N_i$ és $N_j$ elemei felcserélhetők a 2. feladat állítása szerint. Tehát $g = n_1 \cdots n_k$-ra (ahol $n_i \in N_i$) $g^m = 1 \Leftrightarrow n_1^m \cdots n_k^m = 1$, és az egyértelmű felírás miatt az utóbbi ekvivalens azzal, hogy $n_i^m = 1\ \forall i$, és tovább $\Leftrightarrow o(n_i) \mid m\ \forall i \Leftrightarrow [o(n_1), \ldots, o(n_k)] \mid m$.
Tehát a legkisebb $m > 0$, amire $g^m = 1$, egyenlő $[o(n_1), \ldots, o(n_k)]$-val.

**4.** *Milyen rendű elemből hány van az alábbi csoportokban?*

$$Z_4 \times Z_4 \times Z_2, \qquad Z_4 \times Z_2 \times Z_2 \times Z_2, \qquad D_8 \times Z_4$$

*Megoldás:* A direkt szorzatokban szereplő csoportok minden eleme 1, 2 vagy 4 rendű, így az előző feladat szerint a direkt szorzat elemei is csak 1, 2 vagy 4 lehetnek. 1 rendű nyilván csak az egységelem, másodrendűt pedig úgy kaphatunk, ha minden komponens rendje 1 vagy 2, és van köztük 2. Tehát az első csoportban $2 \cdot 2 \cdot 2 - 1 = 7$, a másodikban $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot -1 = 15$, a harmadikban $6 \cdot 2 - 1 = 11$. A többi elem negyedrendű: 24 az elsőben, 16 a másodikban, 20 a harmadikban.

**5.** *Bizonyítsuk be, hogy $D_{12} \cong D_6 \times Z_2$, de $D_{24} \ncong D_{12} \times Z_2$.*

*Megoldás:* Legyenek $G = D_{12}$ generátorelemei a $60°$-os forgatás, és a hatszög valamelyik csúcsán átmenő szimmetriatengelyre való tükrözés. $G = D_{12}$-ben legyen $N_1 = \langle f^3 \rangle$ (a $180°$-os forgatás által generált kételemű csoport) és $N_2 = \langle f^2, t \rangle$ (a $120°$-os forgatás és a

$t$ tükrözés által generált csoport). Ekkor $N_1$ normálosztó, mert $Z(G)$-nek részcsoportja ($t^{-1}f^3t = f^{-3} = f^3$ és $f^{-1}f^3f = f^3$), $N_1$ pedig $D_6$-tal izomorf (a szabályos hatszög párosadik csúcsai által alkotott háromszög szimmetriacsoportja), és így 6-elemű, tehát 2 indexű, következésképpen ez is normálosztó. Továbbá $f^3 \notin N_2$, ezért $N_1 \cap N_2 = 1$. Viszont akkor $|N_1N_2| = |N_1| \cdot |N_2|/|N_1 \cap N_2| = 12$, ezért $N_1N_2 = G$ Azt kaptuk, hogy $G = N_2 \times N_1 \cong D_6 \times Z_2$.
Ha $D_{24}$ és $D_{12} \times Z_2$ izomorfak lennének, akkor ugyanolyan rendű elemek lennének bennük, és mindegyikből ugyanannyi (ez persze csak szükséges feltétele az izomorfiának, korántsem elégséges). De $D_{24}$-ben van 12-edrendű elem (a maximális rendű forgatás), viszont $D_{12}$-ben az elemek rendjei mind osztói a 6-nak, $Z_2$-ben pedig 2-nek, így a direkt szorzatban is minden elemrend osztója a 6-nak. Tehát ez a két csoport nem lehet izomorf.

**6.** *Lássuk be, hogy ha $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_r^{\alpha_r}$, akkor $Z_n \cong Z_{p_1^{\alpha_1}} \times \cdots \times Z_{p_r^{\alpha_r}}$, és ennél több nem triviális tényező direkt szorzatára nem lehet a $Z_n$-et felbontani.*

*Megoldás:* A jobb oldali direkt szorzat elemszáma nyilván $n$. Ha $a_i$ az $i$. direkt tényező generátoreleme, akkor $(a_1, \ldots, a_r)$ rendje a 2. feladat szerint $[p_1^{\alpha_1}, \ldots, p_r^{\alpha_r}] = p_1^{\alpha_1} \cdots p_r^{\alpha_r} = n$, ezért ez a direkt szorzat ciklikus, és izomorf $Z_n$-nel.
Ha $Z_n$ előáll m tényező direkt szorzataként, és $g = (g_1, \ldots, g_m)$ egy generátoreleme (tehát $n$-edrendű), akkor a 2. feladat állítása miatt az $o(g_i)$-k között minden $j$-re van olyan, amely osztható $p_j^{\alpha_j}$-vel. Ha minden $j$-hez egyetlen komponenst választunk (lehet, hogy több $j$-hez ugyanazt), akkor az ezekhez tartozó legföljebb $r$ darab direkt komponens direkt szorzatának a rendje osztható $n$-nel, tehát már azok is kigenerálják a teljes csoportot, de akkor nem is létezhet a felbontásban más direkt tényező (az diszjunkt kellene, hogy legyen ezek generátumától). Tehát nem lehet $r$-nél több tényezője a direkt szorzatnak.

**7.** *Mutassuk meg, hogy $Z(G \times H) = Z(G) \times Z(H)$.*

*Megoldás:* $\geq$: Ha $g \in Z(G)$ és $h \in Z(H)$, akkor minden $(x, y) \in G \times H$-ra $(g, h)(x, y) = (gx, hy) = (xg, yh) = (x, y)(g, h)$.
$\leq$: Ha $(g, h) \in Z(G \times H)$, akkor minden $(x, y) \in G \times H$-ra $(gx, hy) = (g, h)(x, y) = (x, y)(g, h) = (xg, yh)$, és így $gx = xg$ $\forall x \in G$ és $hy = yh$ $\forall y \in H$, azaz $g \in Z(G)$ és $h \in Z(H)$, tehát $(g, h) \in Z(G) \times Z(H)$.

**8.** *Hány konjugáltosztálya van $S_4 \times S_4$-nek?*

*Megoldás:* Általánosan, $(g, h), (x, y) \in G \times H$-ra
$(g, h)^{(x,y)} = (x^{-1}, y^{-1})(g, h)(x, y) = (x^{-1}gx, y^{-1}hy) = (g^x, h^y)$, tehát $(g, h)$-nak konjugáltja minden olyan elempár, ahol az első komponens $g$-nek, a második $h$-nak konjugáltja, azaz $G \times H$ konjugáltosztályai a $G$ és a $H$ tetszőleges konjugáltosztályainak Descates-szorzatai ($G \times H$-t belső direkt szorzatnak tekintve komplexusszorzatai). Ebben az esetben az adott cikulsfelbontás-párokhoz tartozó elempárok alkotnak egy-egy konjugáltosztályt. Mivel $S_4$-nek 5 konjugáltosztálya van, $S_4 \times S_4$-nek 25 lesz.

**9.** *Keressünk*
*a) p-Sylow-részcsoportot $S_p$-ben;*
*b) 2-Sylow-részcsoportot $S_4$-ben és $S_6$-ban!*

*Megoldás:* a) $p!$ csak a $p$ első hatványával osztható, ezért az $S_p$ $p$-Sylowja csak $p$-edrendű lehet, ez pedig egy tetszőleges $p$-ciklus által generált csoport.

b) $|S_4| = 24 = 8 \cdot 3$, így a 2-Sylowja 8-adrendű. Ha $D_8$-at a négyzet négy csúcsán ható permutációcsoportnak tekintjük (a csúcsok permutációja meghatározza az egybevágóságot is), akkor $D_8 \leq S_4$, és 8-adrendű, tehát 2-Sylow-részcsoport, megadható például mint $\langle (1234), (12)(34) \rangle$, illetve ennek konjugáltjai, amelyek a négyzet csúcsainak más számozásaihoz tartoznak.
$S_6$-ban 16-odrendű részcsoportot kell keresnünk. Az $S_4$ 2-Sylowja természetesen $S_6$-ban is benne van. Ezt viszont centralizálja a tőle diszjunkt részcsoportot generáló (56) ciklus, így $\langle (1234), (12)(34), (56) \rangle = \langle (1234), (12)(34) \rangle \times \langle (56) \rangle \cong D_8 \times Z_2$ 16-elemű, tehát 2-Sylow $S_6$-ban.

**10.** *Legyen $G \leq S_n$. Lássuk be, hogy*
*a) ha $G$ reguláris, akkor $|G| = n$;*
*b) ha $G$ tranzitív, akkor $n \mid |G|$.*

*Megoldás:* a) Rögzítsünk egy elemet az alaphalmazon, mondjuk $\alpha$-t. A regularitás következtében az alaphalmaz minden $\beta$ eleméhez egyetlen olyan $g \in G$ van, amelyre $\alpha g = \beta$ (és persze $G$ minden eleme elviszi $\alpha$-t valamelyik $\beta$-ba), így $G$-nek pontosan $n$ eleme van.
b) Legyen $\alpha$ eleme az alaphalmaznak, és $G_\alpha = \{ g \in G \mid \alpha g = \alpha \} \leq G$ az $\alpha$ stabilizátora. Ez a $G_\alpha$ részcsoportja $G$-nek, és a mellékosztályai azokból az elemekből állnak, amelyek ugyanoda viszik $\alpha$-t ($\alpha x = \alpha y \Leftrightarrow \alpha x y^{-1} = \alpha \Leftrightarrow x y^{-1} \in G_\alpha \Leftrightarrow G_\alpha x = G_\alpha y$). De a tranzitivitás miatt $\alpha$-t az alaphalmaz mind az $n$ elemébe el lehet vinni, ezért $|G : G_\alpha| = n$, következésképpen $n \mid |G|$.

**11.** *Melyik tranzitív az alábbi permutációcsoportok közül?*
$G_1 = \langle (1234), (23) \rangle \leq S_4, \quad G_2 = \langle (12)(123), (56) \rangle \leq S_6, \quad G_3 = \langle (1234), (435) \rangle \leq S_5$
*Mit mondhatunk ennek alapján $G_3$ rendjéről?*

*Megoldás:* $G_1$ esetén már az első elem hatványai, $1, a, a^2, a^3$, el tudnak vinni mindent mindenhova, pl. az 1-et rendre 1-be, 2-be, 3-ba, 4-be (másképp: a hozzá tartozó gráfban van egy 1234 kör, ezért összefüggő), így $G_1$ tranzitív.
Ha felrajzoljuk a $G_2$ generátorelemek hatását az $\{1,2,3,4,5,6\}$ csúcsokhoz tartozó gráfban, akkor látható, hogy ennek a gráfnak összefüggő komponensei az $\{1,2,3\}$, $\{4\}$, $\{5,6\}$, tehát a $G_2$ csoport nem tranzitív.
$G_3$ esetén a gráfból megint látszik, hogy tranzitív: ha $a, b$ a generátorelemek, akkor $1 \mapsto i$ ($i = 1,2,3,4,5$) permuációkat adnak rendre az $1, a, a^2, a^3, a^2 b$ elemek (elég, hogy egy csúcsból az összes többi elérhető).
A 9.b) feladatból így következik, hogy $5 \mid |G_3|$. Másrészt $G_3$-nak van negyed- és harmadrendű eleme (a megadott generátorelemek ilyenek), ezért $4, 3 \mid |G_3|$, és ebből $60 \mid |G_3|$. Másrészt $|G_3| \mid |S_5| = 120$, tehát $|G_3|$ csak 60 vagy 120 lehet. Az első esetben 2 indexű, ezért normálosztó, és ha nem egyezik meg az $A_5$-tel, akkor valódi módon metsz bele ($120 = |G_3 A_5| = |G_3| \cdot |A_5| / |G_3 \cap A_5| = 60 \cdot 60 / |G_3 \cap A_3| \Rightarrow |G_3 \cap A_3| = 30$), és ez ellentmond annak, hogy $A_5$ egyszerű. De $G_3 = A_5$ sem lehet, mert $(1234) \in G_3$ páratlan permutáció. Tehát $G_3 = S_5$ 120 elemű.

**Hf1.** *Bizonyítsuk be, hogy a $G \times G$ direkt szorzat diagonális részcsoportja, $T = \{(g,g) \mid g \in G\}$ akkor és csak akkor normálosztó, ha $G$ Abel-csoport. (Azt is lássuk be, hogy ez részcsoport!)*

**Hf2.** *Milyen $n$-re van $S_n$-nek 6-elemű tranzitív részcsoportja?*