1. *Legyen $H < G$, ahol $|G : H| = n$. Tekintsük G-nek azt a csoporthatását a H jobb oldali mellékosztályain, amelynél minden $g \in G$ a Hx mellékosztályt Hxg-be viszi.*
 a) Bizonyítsuk be, hogy ez tranzitív csoporthatás n elemen.
 b) Lássuk be, hogy a csoporthatás magja $\bigcap\limits_{x \in G} x^{-1}Hx$ a G-nek a H-ban levő legnagyobb normálosztója.

Megoldás: a) Tetszőleges Hx és Hy mellékosztályokra a $g = x^{-1}y$ elem a Hx-et Hy-ba viszi.
 b) $g \in G$ a magban van $\Leftrightarrow Hxg = Hx\ \forall x \in G \Leftrightarrow Hxgx^{-1} = H\ \forall x \Leftrightarrow xgx^{-1} \in H\ \forall x \Leftrightarrow g \in x^{-1}Hx\ \forall x \Leftrightarrow g \in \bigcap\limits_{x \in G} x^{-1}Hx$.
 A mag szükségképpen normálosztó, másrészt ha $N \lhd G$-re $N \leq H$, akkor $N = N^x \leq H^x$ $\forall x$, így $N \leq \bigcap\limits_{x \in G} x^{-1}Hx$, tehát a mag a H-ban levő legnagyobb normálosztója G-nek.

2. *Legyen $H < G$, $|G : H| \leq n$, és $|G| > n!$. Bizonyítsuk be, hogy ekkor G nem lehet egyszerű.*

Megoldás: Tekintsük a G-nek a H mellékosztályain való, az 1. feladatban leírt csoporthatását. Ez egy φ homomorfizmust ad G-ből S_n-be, ahol a H n mellékosztályát az $1, 2, \ldots, n$ számokkal számozzuk. A homomorfizmustétel szerint $G/\operatorname{Ker}\varphi \cong \operatorname{Im}\varphi$, így $|G|/|\operatorname{Ker}\varphi| = |\operatorname{Im}\varphi| \leq |S_n| = n!$, és $|G| > n!$, így $\operatorname{Ker}\varphi \neq 1$. De $\operatorname{Ker}\varphi \leq H$ (az 1.b) feladat szerint), ezért $\operatorname{Ker}\varphi \neq G$, vagyis $\operatorname{Ker}\varphi$ a G-nek valódi normálosztója. Következésképpen G nem lehet egyszerű.

3. *Hány eleme van a $\mathbb{Z}_2$ fölötti 3×3-as invertálható mátrixok csoportjának, $GL_3(\mathbb{Z}_2)$-nek? Adjuk meg ennek a csoportnak egy 2-Sylow-részcsoportját.*

Megoldás: Invertálható mátrixot akkor kapunk, ha a három sorvektort függetlennek választjuk. Azaz az első sorba tetszőleges nemnulla vektort választhatunk ($2^3 - 1 = 7$-féle), a második sor nem lehet ennek skalárszorosa ($2^3 - 2 = 6$-féle lehet), a harmadik nem lehet ennek a két független vektornak lineáris kombinációja ($2^3 - 2^2 = 4$-féle lehet, ugyanis a lineáris kombinációkban az együtthatók egyértelműek a két vektor függetlensége miatt, és együtthatókból 2^2-féle választás van). Tehát $G = GL_3(\mathbb{Z}_2)$ elemszáma $7 \cdot 6 \cdot 4 = 168$.
$168 = 2^3 \cdot 3 \cdot 7$, így G 2-Sylowja 8 elemű. 8-elemű részcsoportot könnyen találunk, az invertálható felső háromszögmátrixok éppen 8-an vannak, és tudjuk, hogy ez a halmaz zárt a szorzásra és az invertálásra is. (Több 2-Sylow-részcsoportja is van G-nek, például az alsó háromszögmátrixok is egy 2-Sylowot alkotnak.)

4. *Legyen $P \in Syl_p(G)$. Bizonyítsuk be, hogy az alábbi állítások ekvivalensek.*
 (i) $P \lhd G$;
 (ii) $|Syl_p(G)| = 1$;
 (iii) P tartalmazza G-nek minden p-hatványrendű részcsoportját;
 (iv) P karakterisztikus részcsoport G-ben, azaz minden $\sigma \in \operatorname{Aut} G$-re $P^\sigma = P$.

Megoldás: *(i)* $\Rightarrow$ *(ii)*: A Sylow-tételek szerint P-t mindegyik p-Sylowba el lehet konjugálni, viszont ha P normálosztója G-nek, akkor P minden konjugáltja önmaga, így $Syl_p(G) = \{P\}$.
(ii) $\Rightarrow$ *(iii)*: Az első Sylow-tétel erősebb változata kimondja, hogy bármely p-részcsoportot tartalmazza valamelyik Sylow-féle p-részcsoport. De a *(ii)* szerint csak egy p-Sylow van, így P tartalmazza az összes p-részcsoportot.

$(iii) \Rightarrow (iv)$: Ha $\sigma \in \operatorname{Aut} G$, akkor P^σ is részcsoport, és az elemszáma megegyezik P elemszámával, így p-részcsoport is. A (iii) szerint ezért $P^\sigma \leq P$, de mivel azonos az elemszámuk, $P^\sigma = P$.
$(iv) \Rightarrow (i)$: Tetszőleges $g \in G$ elemmel való konjugálás automorfizmusa G-nek, így a (iv) szerint $P^g = P$ $\forall g \in G$-re, tehát $P \lhd G$.

5. *A Sylow-részcsoportok vizsgálatával bizonyítsuk be, hogy minden* 91*-edrendű csoport ciklikus.*

Megoldás: Legyen $|G| = 91 = 7 \cdot 13$, és $P_7 \in Syl_7(G)$, $P_{13} \in Syl_{13}(G)$.
Mivel $|Syl_7(G)| \equiv 1 \pmod 7$ és osztója 13-nak, $|Syl_7(G)| = 1$, és így $P_7 \lhd G$. Ugyanígy $|Syl_{13}(G)| \equiv 1 \pmod{13}$ és osztója 7-nek, tehát $|Syl_{13}(G)| = 1$, és így $P_{13} \lhd G$. De a P_7 és P_{13} normálosztókra $P_7 \cap P_{13} = 1$, mert relatív prím rendűek, és $|P_7 P_{13}| = \frac{|P_7||P_{13}|}{|P_7 \cap P_{13}|} = 91 = |G|$ miatt $P_7 P_{13} = G$, tehát $G = P_7 \times P_{13} \cong Z_7 \times Z_{13} \cong Z_{91}$, ahol kihasználjuk, hogy P_7 és P_{13} prímrendű, tehát ciklikus, és hogy relatív prím rendű ciklikusok direkt szorzata maga is ciklikus (a komponensek generátorelemei szorzatának rendje az egyes komponensek rendjének legkisebb közös többszöröse, de ebben az esetben szorzata, és az éppen a teljes csoport rendje).

6. *Bizonyítsuk be, hogy G nem lehet egyszerű, ha $|G| = 36$, 56, 80 vagy* 30.

Megoldás: Ha $|G| = 36 = 2^2 3^2$, akkor G 3-Sylow-részcsoportja 9-elemű, tehát 4 indexű részcsoport. Mivel $|G| > 4!$, a 2. feladat szerint G nem lehet egyszerű.
Ha $|G| = 56$, és $P \in Syl_7(G)$, akkor $|Syl_7(G)| \equiv 1 \pmod 7$, és $|Syl_7(G)| \mid |G : P| = 8$ miatt $|Syl_7(G)| = 1$ vagy 8. Az első esetben $P \lhd G$, tehát G nem egyszerű. Ha viszont 8 darab 7-Sylow van, akkor — mivel ezek prímrendű csoportok, tehát nem metszhetnek egymásba — a 7-Sylowok összesen tartalmaznak $8 \cdot 6 = 48$ darab 7-edrendű elemet. Így G-ben legföljebb $56 - 48 = 8$ nem hetedrendű elem van. Tetszőleges 2-Sylow csak ebben a 8-elemű halmazban lehet benne, de a 2-Sylowok is 8 eleműek, ezért ezek mind megegyeznek, azaz a 2-Sylow normálosztó. Így arra jutottunk, hogy ebben az esetben sem egyszerű a G csoport.
Ha $|G| = 80$, akkor $|Syl_5(G)| \equiv 1 \pmod 5$, és $|Syl_5(G)| \mid 16$, ezért $|Syl_5(G)| = 1$ vagy 16. Ugyanúgy, mint az előző esetben, vagy azt kapjuk, hogy az 5-Sylow normálosztó, vagy elemszámlálással látjuk, hogy az 5-ödrendű elemek lefednek 64 elemet a 80-ból, tehát a maradék 16-elemű halmazba már csak egy 2-Sylow fér bele, ezért ilyenkor a 2-Sylow lesz normálosztó.
Ha $|G| = 30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$, akkor $|Syl_5(G)| \equiv 1 \pmod 5$, és $|Syl_5(G)| \mid |G : P| = 6$ miatt $|Syl_5(G)| = 1$ vagy 6. Az első esetben az 5-Sylow normálosztó. A másodikban az előző esethez hasonlóan azt kapjuk, hogy G-ben $6 \cdot 4 = 24$ ötödrendű elem van, ezért az összes 3- és 2-Sylow benne van egy 6 elemű részhalmazban. De ha a 3-Sylow nem normálosztó, akkor a $|Syl_3(G)| \equiv 1 \pmod 3$ feltétel miatt, legalább 4 darab 3-Sylow van, azoknak pedig (mivel ezek is prím elemszámúak, és így diszjunktak) összesen legalább $4 \cdot 2 = 8$ harmadrendű eleme lenne, ami nem fér el a hatelemű halmazban. Tehát az 5- vagy a 3-Sylow normálosztó.

7. *Bizonyítsuk be, hogy G-ben valamelyik Sylow-részcsoport mindenképpen normálosztó, ha*
a) $|G| = pq$; *b)* $|G| = p^2 q$; *c)* $|G| = pqr$, *ahol* p, q, r *különböző prímek.*

Megoldás: a) Legyen $p > q$. Ekkor a $|Syl_p(G)| \equiv 1 \pmod{p}$ és $|Syl_p(G)| \mid q$ feltétel miatt $|Syl_p(G)| = 1$, tehát a p-Sylow normálosztó.

b) Ha $p > q$, akkor az előző esethez hasonlóan azt kapjuk, hogy a p-Sylow normálosztó. Tegyük fel most, hogy $p < q$. Ekkor $|Syl_q(G)| \equiv 1 \pmod{q}$, és $|Syl_q(G)| \mid p^2$. Ha $|Syl_q(G)| = 1$, akkor a q-Sylow normálosztó. $|Syl_p(G)|$ nem lehet p, mert $1 < p < q$. Végül ha $|Syl_p(G)| = p^2$, akkor összesen $p^2(q-1) = p^2q - p^2$ darab q-adrendű eleme van G-nek, így a többi elem egy p^2 rendű részhalmazban van, s ezért csak egyetlen p-Sylowja lehet G-nek, vagyis ebben az esetben a p-Sylow lesz normálosztó.

c) Feltehetjük, hogy $p > q > r$. A p-Sylowok száma osztója qr-nek, de mivel 1 maradékot ad p-vel osztva, sem q, sem r nem lehet. Tehát vagy normálosztó a p-Sylow, vagy $|Syl_p(G)| = qr$, és így G-nek van $qr(p-1) = pqr - qr$ p-edrendű eleme, és az összes q- és r-Sylow benne van a maradék qr elemű részhalmazban. Ha a q-Sylow nem normálosztó, akkor legalább $q+1$ q-Sylow van G-ben, és így van legalább $(q+1)(q-1) = q^2 - 1$ darab q-adrendű elem. Viszont $q^2 - 1 > q^2 - q = q(q-1) \geq qr$, tehát ennyi nem fér el a qr elemű részhalmazban. Tehát ekkor a q-Sylow lesz normálosztó. (Valójában a második esetben is normálosztó a p-Sylow, ugyanis ha $Syl_q(G) = \{ Q \}$, akkor a G/Q csoportnak az a) rész szerint normálosztó a p-Sylowja. Ennek a p-Sylownak az őasképe $N \triangleleft G$, amelyre $|N| = pq$. Viszont N-nek szintén az a) rész szerint normálosztó a p-Sylowja, P, és így P karakterisztikus részcsoport is N-ben. Most tetszőleges $g \in G$-re a g-vel való konjugálás helyben hagyja az N-et, és automorfizmusa is N-nek, tehát $P^g = P$. Így $P \triangleleft G$, és a rendje miatt ez G-ben is p-Sylow-részcsoport.)

Hf1. *Bizonyítsuk be, hogy S_5 tartalmaz D_{12}-vel izomorf (nem tranzitív) részcsoportot. Keressünk a szabályos hatszögön öt olyan alakzatot, amelyeknek a halmazán a hatszög szimmetriái hűségesen hatnak (azaz nincs D_{12}-nek olyan 1-től különböző eleme, amely mind az ötöt helyben hagyja)!*

Hf2. *Legyen G egy 140-edrendű csoport. Bizonyítsuk be, hogy G-nek legalább két Sylow-részcsoportja normálosztó! Ezt felhasználva lássuk be, hogy G-ben van 35-ödrenű elem!*