1. *Bizonyítsuk be, hogy végtelen Abel-csoport nem lehet egyszerű.*

Megoldás: Legyen g végtelen Abel-csoport, és $1 \neq g \in G$. Ha $o(g) < \infty$, akkor $\langle g \rangle$ véges, így valódi részcsoport G-ben, s mivel G Abel, $\langle g \rangle$ normálosztó is.
Ha $o(g) = \infty$, akkor $1 < \langle g^2 \rangle < \langle g \rangle \leq G$, így $\langle g^2 \rangle$ valódi részcsoport, és valódi normálosztó is.

2. *Lássuk be, hogy ha $G/Z(G)$ ciklikus, akkor G Abel.*

Megoldás: Tegyük fel, hogy $\bar{G} = G/Z(G)$ ciklikus, és $\bar{G}$-nak generátoreleme $\bar{a} = Z(G)a$. Ekkor $Z(G) \cup \{\, a \,\}$ generátorrendszere G-nek ($Z(G)$ minden mellékosztályát megkapjuk $Z(G)a^n = \{\, za^n \mid z \in Z(G) \,\}$ alakban valamely $n \in \mathbb{Z}$-re). De ennek a generátorrendszernek bármely két különböző eleme felcserélhető egymással, mert legalább az egyik centrumbeli, így a belőlük alkotható kifejezések is felcserélhetők egymással, vagyis G Abel.

3. *Határozzuk meg a következő csoportok centrumát és kommutátor-részcsoportját!*

a) S_n *b)* D_{2n} *c)* p^3 *rendű nem-Abel csoport* *d)* $\left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \;\middle|\; a, b, c \in \mathbb{Z}_3,\ a, c \neq 0 \right\}$

Megoldás: a) $n \neq 2$-re $Z(S_n) = 1$, ahogy ezt korábban bizonyítottuk, és $Z(S_2) = S_2$. A kommutátor-részcsoport az $n = 1, 2$ kommutatív esetekben nyilván 1. $n \geq 3$-ra $S_n/A_n \cong Z_2$ Abel, így $S_n' \leq A_n$. Másrészt minden páros permutáció benne van a kommutátor-részcsoportban, ugyanis páros sok transzpozíció szorzataként írható, és tetszőleges két transzpozíció $t_1 t_2$ szorzata kommutátorelem S_n-ben, mert van olyan $g \in S_n$, hogy $t_1 = g^{-1} t_2 g$, tehát $t_1 t_2 = g^{-1} t_2 g t_2 = g^{-1} t_2^{-1} g t_2 = [g, t_2]$. Így $A_n \leq S_n'$, következésképpen $S_n' = A_n$, ha $n \geq 3$.

b) $[t, f] = t^{-1} f^{-1} t f = f f = f^2 \Rightarrow \langle f^2 \rangle \leq D_{2n}'$. Másrészt $\langle f^2 \rangle \lhd D_{2n}$, mert $t^{-1} f^2 t = f^{-2} \in \langle f^2 \rangle$, és $f^{-1} f^2 f = f^2 \in \langle f^2 \rangle$. Továbbá $|\langle f \rangle : \langle f^2 \rangle| \leq 2$ (páratlan n-re 1, páros n-re 2), így $D_{2n}/\langle f^2 \rangle$ legföljebb 4 elemű, így szükségképpen Abel, tehát $D_{2n}' \leq \langle f^2 \rangle \leq D_{2n}'$, vagyis $D_{2n}' = \langle f^2 \rangle$ (ami $\langle f \rangle$, ha n páratlan).

c) Legyen $|G| = p^3$ valamely p prímre. Tudjuk, hogy ekkor $Z(G) \neq 1$, tehát $|Z(G)| \geq p$, másrészt, mivel G nem Abel, a 2. feladat szerint $G/Z(G)$ nem ciklikus, így $|G/Z(G)| > p$, vagyis $|Z(G)| < p^2$. Így $|Z(G)| = p$, és G minden normálosztója metszi a centrumot, tehát a centrum az egyetlen p-edrendű normálosztó.
$G/Z(G)$ emiatt p^2 rendű csoport. De egy p^2 rendű csoport szükségképpen Abel. (Ha $|H| = p^2$, akkor $Z(H) \neq 1$ miatt $|H/Z(H)| \mid p$, és így $H/Z(H)$ ciklikus $\Rightarrow$ a 2. feladat szerint H Abel.) Ezért $G' \leq Z(G)$. Viszont G nem Abel, tehát $G' \neq 1$, és emiatt $G' = Z(G)$.

d) Legyen G a megadott mátrixcsoport. Keressük azokat az A mátrixokat G-ből, amelyekre $AX = XA$ minden $X \in G$-re.
$AX = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y \\ 0 & z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax & ay + bz \\ 0 & cz \end{bmatrix}$, míg $XA = \begin{bmatrix} x & y \\ 0 & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax & bx + cy \\ 0 & cz \end{bmatrix}$. Ez a kettő csak akkor egyenlő minden $x, y, z \in \mathbb{Z}_3$, $x, z \neq 0$ számra (pl. $x = y = z = 1$-re és $x = -z = 1$, $y = 0$-ra is), ha $b = 0$ és $a = c$. Tehát $Z(G) = \{\, aI \mid a = \pm 1 \,\}$ 2-elemű részcsoport.
Az $\begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ alakú mátrixok könnyen láthatóan normálosztót alkotnak G-ben (legyen

ez N), és N mellékosztályainak teljes reprezentánsrendszerét alkotják a diagonális mátrixok, amelyek a szorzásra és invertálásra is zártak, így G/N izomorf az invertálható diagonális mátrixok csoportjával, amely nyilvánvalóan Abel (és mellesleg 4 elemű), így $G' \leq N$. De $|N| = 3$ miatt N-nek nincs valódi részcsoportja, G' pedig nem lehet 1, mert G nem Abel (láttuk, hogy a centrum nem a teljes csoport), tehát $G' = N$ az $(1, 1)$ átlójú felső háromszögmátrixok csoportja.

4. *Bizonyítsuk be, hogy ha H maximális valódi részcsoportja G-nek, akkor $H \geq Z(G)$ vagy $H \geq G'$.*

Megoldás: Tegyük fel, hogy $Z(G) \not\leq H$. Ekkor $H < HZ(G) \leq G$, de H maximális részcsoport, így $HZ(G) = G$. De akkor $H \lhd G$, mert H és $Z(G)$ is normalizálja H-t, így az általuk generált teljes G csoport is. Továbbá $G/H = Z(G)H/H \cong Z(G)/H \cap Z(G)$ Abel-csoport faktora, így maga is Abel, következésképpen $G' \leq H$.

5. *Lássuk be, hogy egy véges csoport pontosan akkor nem feloldható, ha van nemkommutatív egyszerű kompozíciófaktora.*

Megoldás: Lássuk be először, hogy ha G maga nem kommutatív egyszerű csoport, akkor nem feloldható. Ebben az esetben ugyanis $G' \lhd G$ miatt G' csak 1 vagy G lehetne, de 1 nem lehet, mert G nem Abel. Tehát G kommutátorlánca $G' = G$, $G'' = G$, $G''' = G$, ... soha nem ér le 1-ig.
Mivel feloldható csoportnak részcsoportja és faktorcsoportja is feloldható, az előzőekből következik, hogy ha van nem kommutatív egyszerű kompozíciófaktor, akkor a csoport nem lehet feloldható.
Fordítva, tegyük fel, hogy a csoport nem feloldható. Véges csoportnak nyilván van kompozíciólánca (addig finomítjuk a láncot, amíg találunk közbülső normálosztót, azaz amíg a faktorok egyszerűek nem lesznek). Ha mindegyik faktor kommutatív, akkor a csoport definíció szerint feloldható lenne, tehát kell, hogy legyen egy nem kommutatív kompozíciófaktor, ami szükségképpen egyszerű csoport is.

6. *Legyen $N \lhd H \leq G$, és $M \lhd G$. Bizonyítsuk be, hogy ha H/N egyszerű, akkor HM/NM vagy egyszerű, vagy* 1.

Megoldás: Ellenőrizzük először, hogy $NM \lhd HM$. Valóban, $h \in H$, $m \in M$-re $(NM)^{hm} = N^{hm}M^{hm} = N^m M = m^{-1}NmM \subseteq \langle N, M\rangle = NM$. Így alkalmazhatjuk az 1. izomorfizmustételt a HM csoport H részcsoportjára és NM normálosztójára.
$HM/NM = (HN)M/NM = H(NM)/NM \cong H/(H \cap NM)$. Mivel $N \leq H$, és $N \leq MN$, azt kapjuk, hogy $N \leq H \cap MN$, tehát alkalmazhatjuk a 2. izomorfizmus-tételt a H-ban: $H/(H \cap NM) \cong (H/N)/((H \cap MN)/N)$, vagyis HM/NM izomorf az egyszerű H/N csoport egy faktorcsoportjával, így vagy 1 vagy izomorf H/N-nel, ezért egyszerű.

7. *Határozzuk meg az S_4, Z_{12} Z_{p^n}, D_{2n}, $GL_2(\mathbb{Z}_3)$ csoportok kommutátorláncát és kompozíciófaktorait.*

Megoldás: $S_4' = A_4$ a 3.a) feladat megoldása szerint . A_4-ben 3 indexű, és így kommutatív faktorú a szintén normálosztó $V = \langle(12)(34), (13)(24)\rangle$ Klein-csoport, más valódi normálosztója pedig A_4-nek sincs, és A_4 maga nem kommutatív, ezért $A_4' = V$. Végül $V \cong Z_2 \times Z_2$ Abel-csoport, tehát $V' = 1$. Eszerint S_4 kommutátorlánca $S_4 > A_4 > V > 1$. A faktorok közül egyedül $V/1$ nem prím elemszámú, és azt valóban lehet finomítani normálláncként: kompozíciólánc lesz például: $S_4 > A_4 > V > \langle (12)(34) \rangle > 1$, a kompozíciófaktorok pedig Z_2, Z_3, Z_2, Z_2.

Legyen $Z_{12} = \langle a \rangle$. Mivel ez Abel-csoport, a kommutátorlánca $Z_{12} > 1$, továbbá bármely részcsoportlánca normállánc, és ezt lehet is úgy finomítani, hogy prím elemszámúak legyenek a faktorok, tehát kompozíciólánc lesz például : $\langle a \rangle > \langle a^2 \rangle > \langle a^4 \rangle > 1$, ahol $o(a^2) = 6$, $o(a^4) = 3$, és így a faktorok elemszáma rendre 2, 2 és 3, és a kompozíciófaktorok Z_2, Z_2 és Z_3. Más kompozícióláncot is választhattunk volna, és akkor a faktorok is más sorrendben következhetnek, pl.az $\langle a \rangle > \langle a^3 \rangle > \langle a^6 \rangle > 1$, illetve az $\langle a \rangle > \langle a^2 \rangle > \langle a^6 \rangle > 1$ kompozícióláncnál a faktorok rendre Z_3, Z_2, Z_2, illetve Z_2, Z_3, Z_2.

Legyen $Z_{p^n} \cong G = \langle a \rangle$. Itt normállánc lesz $\langle a \rangle > \langle a^p \rangle > \langle a^{p^2} \rangle > \cdots > \langle a^{p^{n-1}} \rangle > 1$, ahol minden faktor p elemű, és így izomorf Z_p-vel. Következésképpen minden kompozícióláncban p eleműek a faktorok. Viszont ciklikus csoportban minden rendhez legföljebb egy olyan rendű részcsoport van, ezért G-nek ez az egy kompozíciólánca létezik.

Láttuk a 3.b) feladatban, hogy $D'_{2n} = \langle f^2 \rangle$, és ez utóbbi már Abel-csoport, így D_{2n} kommutátorlánca $D_{2n} > \langle f^2 \rangle > 1$. Az Abel faktorokat tovább lehet finomítani prím rendű faktorokká, tehát a kompozícófaktorok prím rendű ciklikus csoportok lesznek, amelyeknek rendjei a $2n$ prímfaktorai.

A $G = GL_2(\mathbb{Z}_3)$ csoport rendje $(3^2-1)(3^2-3) = 48$. Hattassuk a G-t a $\mathbb{Z}_3$ fölötti kétdimenziós tér négy egydimenziós alterén: $\varphi : G \to S_4$. A hatás magjában azok a mátrixok vannak, amelyeknek minden nem nulla vektor sajátvektora, azaz a két invertálható skalármátrix, $\pm I$, így $|\operatorname{Im}\varphi| = \frac{48}{2} = 24 \Rightarrow G/\operatorname{Ker}\varphi \cong \operatorname{Im}\varphi = S_4$, tehát az S_4 kompozícióláncának, az $1 \lhd \langle (12)(34) \rangle \lhd V \lhd A_4 \lhd S_4$ normálláncnak az ősképe kiegészíti az $1 \lhd \operatorname{Ker}\varphi$ láncot G kompozícióláncává, amelynek faktorai Z_2, Z_2, Z_2, Z_3, Z_2.
Ha konkrétan meg akarjuk adni a kompozíciólánc elemeit G-ben, érdemes észrevenni, hogy az 1 determinánsú mátrixokból álló, $\operatorname{Ker}\varphi$-t tartalmazó $SL_2(\mathbb{Z}_3)$ egy 2 indexű részcsoportba képződik, így csak ez lehet $\varphi^{-1}(A_4)$. $\varphi^{-1}(V)$ az $SL_2(\mathbb{Z}_3)$ egyetlen 2-Sylowja, tehát csak elegendő számú, 2-hatvány rendű mátrixot kell találni a generálásához, pl. negyedrendűeket, azaz, amelyeknek a karakterisztikus polinomja x^2+1: $\varphi^{-1}(V) = \left\langle \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \right\rangle$. Végül ebből egy negyedrendű részcsoport, mondjuk, $\left\langle \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\rangle$ jó lesz előző láncszemnek. Tehát $GL_2(\mathbb{Z}_3)$ kompozíciólánca:

$$1 \lhd \{\pm I\} \lhd \left\langle \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\rangle \lhd \left\langle \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \right\rangle \lhd SL_2(\mathbb{Z}_3) \lhd GL_2(\mathbb{Z}_3).$$

Egy szürjektív homomorfizmus a kommutátor-részcsoportot kommutátor-részcsoportba viszi, tehát $G = GL_2(\mathbb{Z}_3)$-ra $\varphi(G') = A_4$, $\varphi(G'') = V$, és $\varphi(G''') = 1$. Viszont

$$\left[\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \right] = -I,$$

így $\operatorname{Ker}\varphi \le G' \Rightarrow G' = \varphi^{-1}(A_4) = SL_2(\mathbb{Z}_3)$,
és ugyanebből $\operatorname{Ker}\varphi \le SL_2(\mathbb{Z}_3)' \Rightarrow G'' = \varphi^{-1}(V)$, és

$\operatorname{Ker}\varphi \leq \varphi^{-1}(V)' = \left\langle \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \right\rangle' \Rightarrow G''' = \operatorname{Ker}\varphi = \{\pm I\}$, ami már Abel-csoport. Tehát a kommutátorlánc

$$GL_2(\mathbb{Z}_3) > SL_2(\mathbb{Z}_3) > \left\langle \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \right\rangle > \{\pm I\} > 1.$$

8. *Bizonyítsuk be, hogy minden véges p-csoport feloldható.*

Megoldás: A csoport rendjére vonatkozó teljes indukcióval bizonyítjuk az állítást. Ha $|G| = p$, akkor $G \cong Z_p$ Abel-csoport, tehát nyilván feloldható. Tegyük fel, hogy p^{n-1}-ig igaz, és legyen $|G| = p^n$. Tudjuk, hogy $Z(G) \neq 1$, és $Z(G) \lhd G$. $Z(G)$ feloldható, mert kommutatív, és $G/Z(G)$ feloldható az indukciós feltevés szerint. De a feloldhatóság öröklődik bővítésre, így G is feloldható.

9*. *Bizonyítsuk be, hogy A_n minden eleme kommutátorelem S_n-ben. (Útmutatás: Lássuk be, hogy minden páratlan hosszúságú ciklus, illetve két diszjunkt, páros hosszúságú ciklus szorzata felírható két azonos hosszúságú ciklus szorzataként.)*

Megoldás: $[g, h] = g^{-1}h^{-1}gh = g^{-1}g^h$, tehát azt kell belátnunk, hogy minden A_n-beli elem egy g permutáció inverzének és valamely konjugáltjának szorzata. S_n-ben viszont pontosan az azonos ciklusszerkezetű elemek konjugáltak, tehát elég, ha két azonos ciklusszerkezetű permutáció szorzataként írjuk fel a páros permutációkat. Írjuk fel a páros permutáció diszjunkt ciklusokra bontását csoportosítva, $g = g_1 \dots g_r$ alakban, ahol minden g_i vagy páratlan hosszú ciklus, vagy két páros hosszúságú ciklus szorzata. Először a g_i-ket bontjuk fel két azonos hosszúságú ciklus szorzatára.
$(a_1a_2 \dots a_{n+1}b_1 \dots b_n) = (a_1a_2 \dots a_{n+1})(a_1b_1 \dots b_n)$,
$(a_1a_2 \dots a_ia_{i+1} \dots a_{i+2j})(b_1 \dots b_i) = (a_1 \dots a_{i+j}b_i)(a_1b_1 \dots b_ia_{i+j+1} \dots a_{i+2j})$,
illetve ha eleve azonos hosszúságú páros ciklusok szorzata volt, akkor nem kell rajta változtatni. Így $g_i = h_ih_i'$, ahol h_i és h_i' is legföljebb azokat az elemeket mozgatja, amelyeket a g_i, ezért minden $j \neq i$-re felcserélhetők h_j-vel és h_j'-vel. Következésképpen $g = (h_1h_1')(h_2h_2')\cdots(h_rh_r') = (h_1\cdots h_r)(h_1'\cdots h_r')$, és itt $i \neq j$-re a h_i és h_j, illetve h_i' és h_j' ciklusoknak nincs közös mozgatott elemük, tehát $h = h_1\cdots h_r$ és $h' = h_1'\cdots h_r'$ a h és h' permutációk diszjunkt ciklusokra bontása, ahol minden h_i hossza megegyezik h_i'-ével, tehát h és h', és így h^{-1} és h' is azonos ciklusszerkezetűek. Következésképpen van olyan $x \in S_n$, hogy $h^{-1} = x^{-1}h'x$, és így $g = hh' = x^{-1}(h')^{-1}xh' = [x, h']$.

Hf1. *Bizonyítsuk be (a Burnside-tétel alkalmazása nélkül), hogy G feloldható, ha $|G| = 8p$, és p páratlan prím.*

Hf2. *Határozzuk meg a 3.d) feladat csoportjának kompozíciófaktorait! Milyen sorrendben következhetnek ezek a faktorok a csoport egy kompozícióláncában?*