1. *Legyen $X, Y \leq G$-re $[X,Y] = \langle [x,y] \mid x \in X,\ y \in Y \rangle$. Bizonyítsuk be, hogy*
a) $X \leq G$-re $[X,G] \leq X \Leftrightarrow X \lhd G$;
b) $X, Y \leq G$-re $[X,Y] \leq X \Leftrightarrow Y \leq N_G(X)$;
c) $X, Y \leq G$-re $[X,Y] \lhd \langle X, Y \rangle$.

Megoldás: a) $[X,G] \leq X \Leftrightarrow x^{-1}g^{-1}xg \in X\ \forall x \in X,\ g \in G \Leftrightarrow g^{-1}xg \in X\ \forall x \in X,\ g \in G$ $\Leftrightarrow X \lhd G$.

b) $[X,Y] \leq X \Leftrightarrow x^{-1}y^{-1}xy \in X\ \forall x \in X,\ y \in Y \Leftrightarrow y^{-1}xy \in X\ \forall x \in X,\ y \in Y \Leftrightarrow$ $y \in N_G(X)\ \forall y \in Y \Leftrightarrow Y \leq N_G(X)$.

c) Az nyilvánvaló, hogy $[X,Y] \leq \langle X, Y \rangle$. Tehát elég belátni, hogy $X, Y \leq N_G([X,Y])$, ahhoz pedig azt, hogy X és Y minden eleme az $[X,Y]$ minden generátorelemét $[X,Y]$-belibe konjugálja. Legyen $a, x \in X$, $b, y \in Y$. Ekkor $[x,y]^a = a^{-1}x^{-1}y^{-1}xya = (xa)^{-1}y^{-1}(xa)a^{-1}ya = (xa)^{-1}y^{-1}(xa)yy^{-1}a^{-1}ya = [xa,y][a,y]^{-1} \in [X,Y]$, mert $[xa,y]$ és $[a,y]$ is $[X,Y]$-ban van.
Hasonlóan $[x,y]^b = b^{-1}x^{-1}y^{-1}xyb = b^{-1}x^{-1}bxx^{-1}b^{-1}y^{-1}xyb = [b,x][x,yb] = [x,b]^{-1}[x,yb] \in [X,Y]$.

2. *Feloldható-e a két elemmel generált szabad csoport, F_2?*

Megoldás: F_2-nek bármely két elemmel generálható csoport faktorcsoportja, így például az $S_5 = \langle (12345), (12) \rangle$ is, amelyről tudjuk, hogy nem feloldható ($A_5 \leq S_5$ nemkommutatív, egyszerű csoport). De feloldható csoportnak minden faktorcsoportja is feloldható, így F_2 nem lehet feloldható.

3. *Bizonyítsuk be, hogy F_n' azokból a szavakból áll, amelyekben az egyes betűk kitevőinek összege* 0.

Megoldás: Vegyük észre, hogy a fenti feltétel pontosan akkor teljesül a szó valamely alakjára, amikor az egyszerűsített alakjára, ugyanis az egyszerűsítésnél mindig csak $a^{\varepsilon}a^{-\varepsilon}$ alakú részszót törlünk, ahol a betű, és $\varepsilon \in \{\pm 1\}$. Legyen N az ilyen tulajdonságú szavak halmaza. Az előbbiek alapján N-beli szavak inverze és szorzata is N-beli, továbbá minden kommutátorelem benne van N-ben. Tehát $F_n' \leq N \leq F_n$.
Azt kell még belátni, hogy N benne van F_n'-ben. Ezt az N-beli szavak (redukált) hosszára vonatkozó teljes indukcióval bizonyítjuk. 0 hosszú szó csak az 1, és $1 \in F_n'$. N-ben nincs 1 hosszú szó. Tegyük fel, hogy $w \in N$ redukált szó, és a rövidebb N-beliekről már tudjuk, hogy F_n'-ben van. Ha a a w első betűje (a lehet egy betű inverze is), akkor valahol szerepelnie kell az a^{-1}-nek is:
$w = aua^{-1}u' = aua^{-1}u^{-1}uu' = [a^{-1}, u^{-1}]uu' \in N$, és $[a^{-1}, u^{-1}] \in N$, így $uu' \in N$. Viszont uu'-nek még a nem redukált hossza is kisebb, mint w hossza, így az indukciós feltevés miatt $uu' \in F_n'$, és akkor $w = [a^{-1}, u^{-1}]uu' \in F_n'$ is igaz.

4*. *Bizonyítsuk be, hogy F_n reziduálisan véges, azaz a véges indexű normálosztóinak a metszete* 1. *(Útmutatás: Lássuk be, hogy bármely nem triviális redukált szó nem triviális permutációba vihető egy alkalmas véges szimmetrikus csoportba menő homomorfizmussal.)*

Megoldás: Azt kell belátni, hogy F_n nem triviális elemei nincsenek benne a véges indexű normálosztók metszetében, azaz minden $w \neq 1$ szóra van olyan véges indexű $N \lhd F_n$, hogy $w \notin N$, vagyis alkalmas véges G-re, és $\varphi : F_n \to G$ homomorfizmusra $\varphi(w) \neq 1$.
Legyen $w = a_1a_2 \ldots a_m$ redukált szó, ahol $m \geq 1$, és minden a_i egy betű, vagy egy betű

inverze. Olyan $\varphi : F_n \to S_{m+1}$ homomorfizmust keresünk, amelyre $\varphi(a_i) : i \mapsto i+1$. Ekkor $\varphi(w) : 1 \mapsto m+1$, tehát $\varphi(w) \neq 1$ lesz. Ilyen homomorfizmus valóban létezik, mert w-ben a szabad generátorok képére $i \mapsto i+1$ vagy $i+1 \mapsto i$ előírásokat tettünk (aszerint, hogy a_i egy x_j generátorelemmel vagy annak inverzével egyenlő), de sem $x_j^{-1}x_j$, sem $x_j x_j^{-1}$ nem fordulhat elő egy redukált szóban, így az előírt leképezésnél minden kiinduló pont, és minden végpont is legföljebb egyszer fordulhat elő, tehát kiegészíthetjük ezt egy permutációvá. Ennek a kiterjesztésével az egész szabad csoportra megkapjuk a kívánt φ homomorfizmust.

5. *a) Bizonyítsuk be, hogy az x, y elemek által generált szabad csoportot az $\{ x, xy \}$ halmaz is szabadon generálja.*

b) Bizonyítsuk be, hogy ugyanebben a csoportban az $S = \{ x, y^{-1}xy, y^{-2}xy^2 \}$ halmaz szabadon generálja a $\langle S \rangle$ részcsoportot.

Megoldás: a) Azt kell belátni, hogy minden G csoportra és $g, h \in G$-re a $\varphi : x \mapsto g$, $y \mapsto h$ leképezés egyértelműen kiterjeszthető csoporthomomorfizmussá. Mivel F_2-nek szabad generátorai x és y, van olyan $\psi : F_2 \to G$ homomorfizmus, amelyre $\psi(x) = g$ és $\psi(y) = g^{-1}h$, erre pedig $\psi(xy) = gg^{-1}h = h$, tehát ψ a φ kiterjesztése. A kiterjesztés egyértelmű, mert $\langle x, xy \rangle = \langle x, y \rangle = F_2$.

b) Vegyük azt az $F(u, v, w)$ szabad csoportból $F(x, y)$-ba menő homomorfizmust, amely az $u \mapsto x$, $v \mapsto y^{-1}xy$, $w \mapsto y^{-2}xy^2$ leképezés kiterjesztése. Ez egy n hosszúságú redukált szóhoz olyan $F(x, y)$-beli szót rendel, amelynek a redukált alakjában az $x^{\pm 1}$ megjelenéseinek a száma pontosan n, ugyanis az azonos típusú (u, v vagy w, illetve ezek inverzei) összevonásából keletkezett részszó redukált alakjának elején és végén ugyanaz az y-hatvány szerepel, ami az u, v, illetve w elején és végén, és csak a belső y-ok esnek ki, és ezután a különböző blokkok összeszorzásánál nem nyelődik el a teljes y-hatvány, így az x-ek végig ugyanolyan kitevőn maradnak. Ez azt jelenti, hogy a leképezés magjában csak az 1 van, tehát $\langle S \rangle$ izomorf a három elemmel generált szabad csoporttal, ahol a szabad generátorok az S elemei.

6. *Bizonyítsuk be a következő izomorfiákat a relációkkal megadott csoportokra.*

a) $\langle x, y, z \mid x^2 = y^2 = z^3 = 1,\ xy = yx,\ z^{-1}xz = y,\ z^{-1}yz = xy \rangle \cong A_4$;

b) $\langle x, y \mid x^2 = y^2 = 1,\ xyxy = yxyx \rangle \cong D_8$;

Megoldás: a) Az A_4-ben $a = (12)(34)$, $b = (13)(24)$ és $c = (132)$ kielégítik az $a^2 = b^2 = c^3 = 1$, $ab = ba$, $a^c = b$ és $b^c = ab$ relációkat, és $A_4 = \langle a, b, c \rangle$ ezért a Dyck-tétel szerint A_4 homomorf képe a relációkkal megadott G csoportnak. Másrészt G-ben $xy = yx$ miatt $\langle x \rangle, \langle y \rangle \lhd \langle x, y \rangle$, így $|\langle x, y \rangle| = |\langle x \rangle \langle y \rangle| \leq |\langle x \rangle| \cdot |\langle y \rangle| \leq 2 \cdot 2 = 4$, és $z \in N_G(\langle x, y \rangle)$ mert mindkét generátorelemet a részcsoporton belülre konjugálja, ezért $\langle x, y \rangle \lhd \langle x, y, z \rangle = G$, amiből $|G| = |\langle x, y \rangle \langle z \rangle| \leq |\langle x, y \rangle| \cdot |\langle z \rangle| \leq 4 \cdot 3 = 12 = |A_4|$, így a G-ből A_4-be menő szürjektív homomorfizmus csak izomorfizmus lehet.

b) $D_4 = \langle t, f \rangle = \langle t, tf \rangle$, és a t, tf generátorok kielégítik a megadott relációkat: $t^2 = 1$, $(tf)^2 = 1$, és $t(tf)t(tf) = ff = f^2$ egyenlő $(tf)t(tf)t = tfft = t^{-1}f^2t = f^{-2} = f^2$-tel, tehát D_4 homomorf képe a relációkkal megadott G csoportnak. Másrészt G-ben $1 = xyxyx^{-1}y^{-1}x^{-1}y^{-1} = xyxyxyxy = (xy)^4$, és $x^{-1}(xy)x = yx = y^{-1}x^{-1} = (xy)^{-1}$, így $\langle xy \rangle \lhd \langle xy, x \rangle = \langle x, y \rangle = G \Rightarrow |G| = |\langle xy \rangle \langle x \rangle| \leq |\langle xy \rangle| \cdot |\langle x \rangle| \leq 4 \cdot 2 = 8$, tehát a G-ből D_4-be menő szürjektív homomorfizmus csak izomorfizmus lehet.

7. *Adjuk meg definiáló relációkkal a következő csoportokat:*

a) $Z_2 \times Z_2 \times Z_4$ *b)* $Z_3 \times Z_8$

Megoldás: a) $G = \langle x, y, z \,|\, x^2 = y^2 = z^4 = 1,\ xy = yx,\ xz = zx,\ yz = zy\rangle$ relációit kielégítik a három direkt komponens generátorelemei, így $Z_2 \times Z_2 \times Z_4$ homomorf képe G-nek, másrészt G a három felcserélhetőségi reláció miatt kommutatív, és így $|G| = |\langle x, y, z\rangle| = |\langle x\rangle\langle y\rangle\langle z\rangle| \leq |\langle x\rangle| \cdot |\langle y\rangle| \cdot |\langle z\rangle| \leq 2 \cdot 2 \cdot 4 = 16 = |Z_2 \times Z_2 \times Z_4|$, tehát $G \cong Z_2 \times Z_2 \times Z_4$.

b) Mivel $Z_3 \times Z_8 \cong Z_{24}$, egyetlen generátorral is meg lehet adni: $Z_{24} \cong \langle x \,|\, x^{24} = 1\rangle$.

8. *Izomorfia erejéig hány Abel-csoport van, amelynek rendje*

a) 16*;*

b) 3600*?*

Megoldás: a) Az Abel-csoport kanonikus alakjában mindegyik ciklikus csoport 2-hatványrendű, és a rendek szorzata $16 = 2^4$, tehát annyiféle csoportot kapunk, ahányféleképpen fel lehet bontani a 4-et pozitív egészek összegére: 4, $3 + 1$, $2 + 2$, $2+1+1$ és $1+1+1+1$. Ez öt nem izomorf Abel-csoportot ad: Z_{16}, $Z_8 \times Z_2$, $Z_4 \times Z_4$, $Z_4 \times Z_2 \times Z_2$ és $Z_2 \times Z_2 \times Z_2 \times Z_2$.

b) $3600 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^2$, tehát a csoport a 2^4, 3^2 és 5^2 rendű Sylow-részcsoportjainak a direkt szorzata. Az a) rész szerint az első ötféle lehet, a másik kettő mindegyike kétféle (Z_9 és $Z_3 \times Z_3$, illetve Z_{25} és $Z_5 \times Z_5$), tehát összesen $5 \cdot 2 \cdot 2 = 20$ páronként nem izomorf, 3600 rendű Abel-csoport van.

9. *Hány* 12*-edrendű részcsoportja van a* $Z_4 \times Z_2 \times Z_9$ *Abel-csoportnak? Ebből hány nem ciklikus?*

Megoldás: Abel-csoportban minden p prímre egyetlen p-Sylow van, és ez tartalmazza az összes p-hatványrendű elemet. Tehát ha a $G \cong Z_4 \times Z_2 \times Z_9$ csoport 2-Sylowja G_2, 3-Sylowja G_3, és egy $H \leq G$ részcsoport 2-, illetve 3-Sylowja H_2 és H_3, akkor $H_2 \leq G_2 \cong Z_4 \times Z_2$, és $H_3 \leq G_3 \cong Z_9$. De $|H| = 12 \Rightarrow |H_2| = 4$ és $|H_3| = 3$. A ciklikus G_3-nak csak egy harmadrendű részcsoportja lehet, tehát H_3 egyértelmű. H_2 vagy Z_4-gyel, vagy $Z_2 \times Z_2$-vel izomorf. Az első esetben G_2 negyedrendű elemeit kell összeszámolni, és elosztani kettővel (ugyanis egy negyedrendű ciklikus csoport generátora kétféle elem is lehet), így az ilyen H_2-k száma $2 \cdot 2/2 = 2$. A másodikban H_2 minden $\neq 1$ eleme másodrendű, tehát benne van a $Z_2 \times Z_2$ részcsoportban, de $|H_2| = 4$, így ez egyértelmű. Azt kaptuk, hogy összesen három 12-edrendű részcsoport van, és ebből kettő $Z_4 \times Z_3 \cong Z_{12}$-vel izomorf, tehát ciklikus, a harmadik pedig $Z_2 \times Z_2 \times Z_3$-mal izomorf, így nem ciklikus.