1. *Legyen $a, b \in \mathbb{Z}$, és jelölje $(a_1, \dots, a_n)$ az $a_1, \dots, a_n$ által generált ideált a $\mathbb{Z}$ gyűrűben.*
a) Adjunk feltételt arra, hogy $(a) \subseteq (b)$ legyen.
b) Milyen elem generálja az $(a) \cap (b)$ ideált?
c) Milyen elem generálja az $(a) + (b)$ ideált?

Megoldás: Kommutatív, egységelemes gyűrűben $(a) = aR$.
a) $(a) \subseteq (b) \Leftrightarrow a \in (b) = b\mathbb{Z} \Leftrightarrow b \mid a$
b) $\mathbb{Z}$-ben minden ideál főideál, így $\exists c \in \mathbb{Z}$: $(a) \cap (b) = (c)$ (feltehetjük, hogy $c \geq 0$). Erre a c-re igaz, hogy $(a), (b) \supseteq (c)$, így $a, b \mid c$, azaz c az a, b egy közös többszöröse. Továbbá, ha d is közös többszörös, akkor $(d) \subseteq (a), (b) \Rightarrow (d) \subseteq (a) \cap (b) = (c) \Rightarrow c \mid d$. Vagyis c az (a) és (b) legkisebb közös többszöröse.
c) Könnyen látható, hogy két ideál komplexusösszege is ideál, és ez a legkisebb ideál, ami tartalmazza mindkettőt. Legyen $(a) + (b) = (c)$, ahol $c \geq 0$. Ekkor $(a), (b) \subseteq (c)$, így $c \mid a, b$, azaz c az a és b közös osztója. Továbbá tetszőleges d közös osztóra $d \mid a, b$, tehát $(a), (b) \subseteq (d) \Rightarrow (c) = (a) + (b) \subseteq (d) \Rightarrow d \mid c$, így ez a c az a és b lenagyobb közös osztója.

2. *A H részhalmazaiból álló $(P(H), \triangle, \cap)$ gyűrűben (ahol $\triangle$ a szimmetrikus differencia mint összeadás, és $\cap$ a metszet mint szorzás) mi egy $A \in P(H)$ elem által generált részgyűrű, illetve ideál?*

Megoldás: Az A által generált $\langle A \rangle$ részgyűrűben nyilván benne van $A \triangle A = \emptyset$, viszont $\{\emptyset, A\}$ már zárt mindkét műveletre, és az additív inverzre is, mivel $P(H)$-ban minden elem negatívja önmaga. Tehát $\langle A \rangle = \{\emptyset, A\}$.
$P(H)$ is egységelemes, kommutatív gyűrű, így $(A) = \{ A \cap B \mid B \in P(H) \}$, viszont ez utóbbi éppen az A részhalmazaiból áll, mivel minden B-re $A \cap B \subseteq A$, továbbá minden $C \subseteq A$ előáll $A \cap C$ alakban, így benne van (A)-ban. Tehát $(A) = P(A)$.

3. *a) Bizonyítsuk be, hogy egy H végtelen halmaz véges részhalmazai részgyűrűt alkotnak $P(H)$-ban, de ez a gyűrű nem egységelemes.*
b) A $P(H)$ egyetlen eleme által generált részgyűrűnek, illetve ideálnak mint gyűrűnek van-e egységeleme?

Megoldás: a) Nevezzük el a H véges részhalmazainak halmazát $P(H)_{<\infty}$-nek. Ez a részhalmaz nyilván nem üres, pl. $\emptyset$ benne van. Továbbá véges halmazok metszete is véges, sőt a szimmetrikus differenciája is, mert az utóbbit is tartalmazza a két halmaz uniója. Az elemek additív inverze önmaga, így $P(H)_{<\infty}$ erre is zárt. Következésképpen $P(H)_{<\infty} \leq P(H)$. Viszont ha A egységelem lenne $P(H)_{<\infty}$-ban, akkor $A \cap B = B$ minden $B \subseteq H$ véges részhalmazra, vagyis A tartalmazná H minden véges részhalmazát, így az egyeleműeket is, és akkor az egész H-t is. De akkor A végtelen volna, tehát nem lehetne ebben a részgyűrűben.
b) Igen, $\langle A \rangle = \{\emptyset, A\}$-ban és $(A) = P(A)$-ban (lásd a 2. feladatot) is egységelem az A.

4. *a) Bizonyítsuk be, hogy az $R = M_n(K)$ gyűrű centruma pontosan a skalármátrixokból áll. (Mit jelent egy A mátrixra, hogy $E_{ij}A = AE_{ij}$?)*
b) Bizonyítsuk be, hogy $Z(GL_n(K)) = \{ cI \mid c \neq 0 \}$, és $Z(SL_n(K)) = \{ cI \mid c^n = 1 \}$.

Megoldás: $Z(R) = \{ z \in R \mid rz = zr \, \forall r \in R \}$. Legyen $i \neq j$. Ekkor $E_{ij}A$ az a mátrix, amelynek egyetlen (esetleg) nemnulla sora az i., amely az A j. sorával egyezik meg. AE_{ij}-nek pedig az egyetlen (esetleg) nemnulla oszlopa a j., amely az A i. oszlopával egyezik meg. Ez a kettő csak úgy lehet egyenlő, ha A j. sorában a j. elem kivételével minden 0, A i. oszlopában pedig az i. elem kivételével minden nulla, így $a_{ji} = 0$ is igaz. Továbbá a_{ii}, illetve a_{jj} kerül az $E_{ij}A$ és AE_{ij} mátrix ij. helyére, tehát $a_{ii} = a_{jj}$. Tehát már abból a feltevésből is, hogy az A az E_{ij} $(i \neq j)$ mátrixokkal felcserélhető, következik, hogy A diagonális, és minden diagonális eleme azonos, vagyis $A = cI$ valamely $c \in K$-ra.

a) Az előbbiek alapján R centruma csak a skalármátrixokból állhat, és azok valóban mindennel felcserélhetők.

b) és c) Ha $A \in Z(GL_n(K))$ (vagy $Z(SL_n(K))$), akkor A felcserélhető minden $I + E_{ij}$ mátrixszal is $i \neq j$-re, mert azok is invertálhatók, sőt 1 determinánsúak. Viszont akkor $A + E_{ij}A = (I + E_{ij})A = A(I + E_{ij}) = A + AE_{ij} \Rightarrow E_{ij}A = AE_{ij}$, és az a) rész bizonyításában láttuk, hogy ilyen A mátrix csak skalármátrix lehet. $GL_n(K)$-ban ez a cI $(c \neq 0)$ alakú mátrixokat jelenti, $SL_n(K)$-ban ezek közül csak az 1 determinánsúakat, tehát amelyekre $c^n = 1$.

5. *Határozzuk meg az $M_2(\mathbb{R})$ gyűrű balideáljait.*

Megoldás: Általánosabban, $M = M_n(K)$-ra oldjuk meg a feladatot. Először nézzük meg, hogy mi az egyetlen mátrix által generált balideál. Könnyen látható, hogy egy R egységelemes gyűrűben a elemére Ra balideál, és ez a legkisebb, ami a-t tartalmazza. Esetünkben egy A mátrix által generált balideál $\{\, PA \mid P \in M \,\}$. Mivel a PA szorzat sorai az A sorainak lineáris kombinációi a P megfelelő sorának elemeivel mint együtthatókkal, ilyen módon megkapjuk az összes olyan mátrixot, amelynek sorai az A sorterében vannak. Legyen most L balideál M-ben, és $V = \sum \{\, \mathcal{S}(A) \mid A \in M \,\} \leq K^n$. Belátjuk, hogy ekkor L az összes olyan mátrix halmaza, amelyeknek a sortere V-ben van. Vegyünk egy C mátrixot, amelyre $\mathcal{S}(C) \leq V$. V minden vektora véges sok L-beli mátrix sorterének összegében benne van, tehát C soraihoz is van véges sok $A_1, \ldots, A_m \in L$, hogy C i. sora $c_i = v_{i1} + \ldots + v_{im}$, ahol $v_{ij} \in \mathcal{S}(A_j)$. Így C_j-vel jelölve a $v_{1j}, \ldots, v_{nj}$ sorokból álló mátrixot, van olyan P_j, hogy $P_jA_j = C_j$, és így $C = \sum\limits_{j=1}^{m} P_jA_j \in L$.

Speciálisan, $M_2(\mathbb{R})$-nek 0-n és a teljes gyűrűn kívül csak a következő balideáljai vannak: egy $0 \neq v \in \mathbb{R}^2$ vektorra azok a mátrixok vannak a balideálban, amelyeknek minden sora a v skalárszorosa.

6. *Hány eleme van a $K[x]/(x-1)$ és $K[x]/(x^2-1)$ faktorgyűrűnek $K = \mathbb{Z}_2$ és $K = \mathbb{Z}_3$ esetén? A négy közül melyik faktorgyűrű test?*

Megoldás: Az $x-1$ polinom által generált ideál, $I = (x-1)$, az $x-1$ polinom többszöröseiből áll. $K[x]/(x-1)$ elemei az $f(x) + I$ mellékosztályok. Ezek mindegyikében van egy konstans polinom, mert $f(x)$-ből $x-1$ alkalmas többszörösét kivonva konstansot kapunk (az $x-1$-gyel való maradékos osztás maradékát). Másrészt két konstans nem eshet egy mellékosztályba, mert akkor a különbségük I-beli lenne. Tehát $|K[x]/(x-1)| = |K|$, azaz 2 és 3 a két megadott esetben.

(x^2-1) mellékosztályainak is természetes reprezentánsrendszerét kaphatjuk az x^2-1-gyel való maradékos osztással: minden mellékosztály tartalmaz egy legföljebb elsőfokú polinomot, és semelyik két ilyen polinom nem esik egy mellékosztályba. A legföljebb elsőfokú polinomok száma $K = \mathbb{Z}_2$ esetén $2^2 = 4$, $K = \mathbb{Z}_3$ esetén pedig $3^2 = 9$, tehát ennyi elemű a faktorgyűrű.

$K[x]/(x-1)$-ről azt is könnyen láthatjuk, hogy izomorf K-val, tehát test. Egyrészt,mert a konstans polinomokból álló reprezentánsrendszer részgyűrűt alkot, amely természetesen izomorf K-val, és így a faktorgyűrű és a K közözött kapunk egy művelettartó bijekciót. Másrészt a homomorfizmustételt is használhatjuk: az $f(x) \mapsto f(1)$ leképezés könnyen láthatóan gyűrűhomomorfizmus, amelynek képe a teljes K ($c \mapsto c$), magja pedig éppen azokból a polinomokból áll, amelyeknek gyöke az 1, azaz $x-1$ többszöröseiből.
A $K[x]/(x^2-1)$ faktorgyűrű viszont nem lehet test, mert nem is nullosztómentes. $x^2-1 = (x-1)(x+1)$ nulla a faktorgyűrűben, de az elsőfokú $x-1$ és $x+1$ polinomok nem többszörösei x^2-1-nek, ezért azok a faktorgyűrűben nem nullák. Felírhatjuk a reprezentánsrendszer segítségével a faktorgyűrűk szorzástábláját is: a szorzást úgy végezzük el, hogy a két polinom szorzatát maradékosan osztjuk x^2-1-gyel, és akkor az eredményül kapott mellékosztályból is megkapjuk a megfelelő reprezentánselemet.

$\cdot$	0	1	x	$x+1$
0	0	0	0	0
1	0	1	x	$x+1$
x	0	x	1	$x+1$
$x+1$	0	$x+1$	$x+1$	0

Ebből is láthatjuk, hogy a faktorgyűrű nem nullosztómentes, illetve, hogy nincs minden nemnulla elemnek inverze. Továbbá azt is, hogy $\{0, x+1\}$ valódi ideálja a faktorgyűrűnek (összeadásra is zárt!), és ez az egyetlen valódi ideál.

7. *Bizonyítsuk be, hogy* $\mathbb{R}[x]/(x^2+1) \cong \mathbb{C}$. *(Használjuk a homomorfizmustételt!)*

Megoldás: Vegyük a

$$\varphi : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{C}, \quad f(x) \mapsto f(i)$$

leképezést. Ez nyilván művelettartó ($(f+g)(i) = f(i)+g(i)$ és $(fg)(i) = f(i)g(i)$), továbbá $\operatorname{Im}\varphi = \mathbb{C}$, mert $\varphi(ax+b) = ai+b$ alakban minden komplex számot megkapunk. $f(x) \in \operatorname{Ker}\varphi \Leftrightarrow f(i) = 0$, de $f(x)$ valós polinom, így ebben az esetben $f(-i)$ is 0, ezért $f(x) = (x-i)(x+i)h(x) = (x^2+1)h(x)$ valamely $h(x) \in \mathbb{C}[x]$ polinomra. De akkor $h(x) \in \mathbb{R}[x]$, mert az $f(x)$ maradékos osztása x^2+1-gyel $\mathbb{R}[x]$-en belül is elvégezhető. És fordítva, az ilyen polinomok 0-ba képződnek, tehát $\operatorname{Ker}\varphi = (x^2+1)$. A homomorfizmustétel szerint ebből

$$\mathbb{R}[x]/(x^2+1) = \mathbb{R}[x]/\operatorname{Ker}\varphi \cong \operatorname{Im}\varphi = \mathbb{C}$$

következik.

Hf1. *Adjuk meg az összes olyan* 200*-adrendű Abel-csoportot izomorfia erejéig, amelyben nincs* 100*-adrendű elem!*

Hf2. *Bizonyítsuk be, hogy* $\langle x, y \mid y^{-1}xy = x^2,\ x^{-1}yx = y^2 \rangle = 1$