1. *Adjuk meg a kanonikus alakját (prímhatványrendű ciklikusok direkt szorzataként való felírását) azoknak a 300 elemű Abel-csoportoknak, amelyekben nincs 100-adrendű elem. Mi a maximális elemrend a megadott csoportokban?* *(7 pont)*

Megoldás: $300 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2 \Rightarrow$ egy 300 elemű Abel-csoportban a 2-Sylow Z_4 vagy $Z_2 \times Z_2$, az 5-Sylow Z_{25} vagy $Z_5 \times Z_5$, a 3-Sylow pedig csak Z_3 lehet. A direkt szorzatban az elemek rendje a komponensek rendjének legkisebb közös többszöröse, így pontosan akkor van benne 100-adrendű elem, ha a 2-Sylow Z_4, az 5-Sylow pedig Z_{25}. Tehát a feltételnek megfelelő csoportok

$$\begin{aligned} G_1 =& Z_4 \times Z_3 \times Z_5 \times Z_5 \\ G_2 =& Z_2 \times Z_2 \times Z_3 \times Z_{25} \\ G_3 =& Z_2 \times Z_2 \times Z_3 \times Z_5 \times Z_5. \end{aligned}$$

2. *Van-e S_5-ben olyan tranzitív H részcsoport, amelyre $H = \langle g, h \rangle$, $o(g) = 3$, $o(h) = 2$? (7 pont)*

Megoldás: Ha van a feltételeknek megfelelő $g, h \in S_5$ elem, akkor $o(g) = 3$ miatt g csak 3-ciklus lehet (mondjuk, (123)), h ciklusfelbontása pedig egy vagy két 2-ciklusból áll. De ha h egyetlen 2-ciklus, és ez mozgatja az $1, 2, 3$ valamelyikét, akkor lesz az $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ alaphalmaznak olyan pontja, amelyet g és h is fixen hagy, és így H nem lehet tranzitív. Ha h az $1, 2, 3$ mindegyikét fixen hagyja, akkor $h = (45)$, és H így sem lesz tranzitív: a gráfja az $\{1, 2, 3\}$ és $\{4, 5\}$ összfüggőségi tartományokra esik szét. Tehát h csak két diszjunkt ciklus szorzata lehet úgy, hogy a gráfban a maradék 4 és 5 is hozzá legyen kötve az $1, 2, 3$-on levő háromszöghöz, pl. $h = (14)(25)$ megfelel.

3. *Bizonyítsuk be, hogy egy csoportban minden prím indexű normálosztó tartalmazza a kommutátor-részcsoportot, de prím indexű részcsoportokra ez nem feltétlenül igaz (S_5-ben?).* *(7 pont)*

Megoldás: Ha $N \lhd G$, és $|G : N| = p$ prím, akkor $|G/N| = p \Rightarrow G/N \cong Z_p \Rightarrow G/N$ Abel $\Rightarrow N \geq G'$.
S_5-ben 5 indexű az S_4 részcsoport, amely az 5-öt fixen hagyó permutációkból áll ($120/24 = 5$), másrész tudjuk, hogy $S_5' = A_5$, ami 60 elemű, így nyilvánvalóan $S_4 \not\geq S_5'$.

4. *Egy R gyűrű a eleme nilpotens, ha van olyan n pozitív egész, hogy $a^n = 0$. Legyen $N(R)$ az R gyűrű nilpotens elemeinek halmaza.*

a) Lássuk be, hogy ha R kommutatív, akkor $N(R) \lhd R$, de

b) az $R = \mathbb{Z}_2^{2\times 2}$ nemkommutatív gyűrűben $N(R)$ mégcsak nem is részgyűrű. *(7 pont)*

Megoldás: a) Azt kell belátni, hogy $N(R)$ nem üres, zárt az összeadásra, és az R elemeivel való szorzásra (elég egy oldalról, mert R kommutatív).
$0 \in N(R)$: $0^1 = 0$.
Ha $a^n = b^m = 0$, akkor $(a + b)^{m+n} = \sum_{k=0}^{m+n} \binom{m+n}{k} a^k b^{m+n-k}$ (ebben használtuk R kommutativitását), és itt $k \geq n$ esetén $a^k = 0$, $k \leq n$ esetén $b^{m+n-k} = 0$, vagyis minden tag, és így $(a + b)^{m+n}$ is 0.
Ha $a^n = 0$, és $r \in R$, akkor $(ar)^n = a^n r^n = 0r^n = 0$ (itt is használtuk az R kommutativitását).

b) Az $a = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ és $b = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ mátrixokra $a^2 = b^2 = 0$, de $c := a + b = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ nem nilpotens: $c^2 = I$, tehát c hatványai csak c és I váltakozva. (Egyébként is nyilvánvaló, hogy invertálható elem nem lehet nilpotens: ha $c^n = 0$ lenne, akkor $1 = (c^{-1})^n c^n = 0$ ellentmondás.)

5. *Bizonyítsuk be, hogy minden $3^4 \cdot 5$ elemű csoport feloldható. (Csak előadáson vagy gyakorlaton bizonyított tételre hivatkozzunk!)* *(7 pont)*

Megoldás: $|Syl_3(G)| \equiv 1 \pmod 3$, és $|Syl_3(G)| \mid 5$, így $Syl_3(G)| = 1 \Rightarrow G$ 3-Sylowja normálosztó: $N \lhd G$, $|N| = 3^4$. De ekkor N feloldható, mert p-csoport, és $|G/N| = 5 \Rightarrow G/N$ is feloldható, tehát G is feloldható.

(Az 5-Sylowok számolásával is lehet kezdeni, de ekkor a $|Syl_5(G)| = 81$ eset is szóbajöhet, amit az elemszámláló módszerrel lehet lekezelni, és belátni, hogy ebben az esetben a 3-Sylow lesz normálosztó.)

6. *Tekintsük az S_4 szimmetrikus csoport csoporthatását a konjugálással a 2-Sylowjain. Hány elemű ennek a csoporthatásnak a magja, azaz $\{ g \in S_4 \mid P^g = P \ \forall P \in Syl_2(S_4) \}$? (7 pont)*

Megoldás: Legyen $G = S_4$. $|Syl_2(G)| \mid 3 \Rightarrow |Syl_2(G)| = 1$ vagy 3. De 1 nem lehet, mert akkor lenne G-nek 8-elemű normálosztója, pedig tudjuk, hogy S_4 normálosztói csak 1, V, A_4 és S_4. Tehát a csoport egy háromelemű halmaz elemeit permutálja, azaz a csoporthatás $\varphi : G \to S_3$. $\operatorname{Im}\varphi$ tranzitív csoport a 3. Sylow-tétel miatt, S_3-nak 3-mal osztható rendű részcsoportja, így $|\operatorname{Im}\varphi| = 3$ vagy 6, és ebből $S_4/\operatorname{Ker}\varphi = \operatorname{Im}\varphi$ miatt $\operatorname{Ker}\varphi = 8$ vagy 4. De S_4-nek nincs 8-adrendű normálosztója, tehát $|\operatorname{Ker}\varphi| = 4$.

2. megoldás: Ahogy az előbb, megállapíthatjuk, hogy $|Syl_2(S_4)| = 3$. Ebből következik, hogy minden P 2-Sylowra $|G : N_G(P)| = 3$, de $P \leq N_G(P)$, és P szintén 3 indexű, emiatt $N_G(P) = P$. Tehát $\operatorname{Ker}\varphi = \{ g \in G \mid P^g = P \ \forall P \in Syl_2(G) \} = \bigcap \{ N_G(P) \mid P \in Syl_2(G) \} = \bigcap \{ P \mid P \in Syl_2(G) \}$. Ez legföljebb 8 elemű, mert benne van bármelyik 2-Sylowban, de kisebb is annál, mert több 2-Sylow van. Viszont a V 2-csoport normálosztó, így minden 2-Sylowban benne van, tehát ezek metszetében is. Emiatt $4 \mid |\operatorname{Ker}\varphi| \mid 8$, de nem $8 \Rightarrow |\operatorname{Ker}\varphi| = 4$.