1. Csoportot (esetleg félcsoportot) alkotnak-e
a) $\mathbb{R}^3$ elemei a vektoriális szorzásra nézve
b) a valós 2×2-es invertálható mátrixok az $A * B := AB^T$ műveletre nézve;
az alábbi mátrixhalmazok a mátrixok szokásos összeadására vagy szorzására nézve?
c) az 1 determinánsú $n \times n$-es valós mátrixok;
d) a pozitív determinánsú $n \times n$-es valós mátrixok;
e) a $\mathbb{Z}$ fölötti $n \times n$-es mátrixok;
f) a $\mathbb{Z}$ fölötti nem 0 determinánsú $n \times n$-es mátrixok;
g) a $\mathbb{Z}$ fölötti 1 determinánsú $n \times n$-es mátrixok;
h) az $n \times n$-es valós felső háromszögmátrixok.

2. Bizonyítsuk be, hogy egy egységelemes félcsoportban
a) ha a és b invertálható, akkor ab és ba is invertálható;
b) ha ab és ba invertálható, akkor a és b is invertálható.
Adjunk példát arra, hogy ab invertálhatóságából nem feltétlenül következik a vagy b invertálhatósága.

3. Bizonyítsuk be, hogy ha egy csoportban $x^2 = 1$ minden x elemre, akkor a csoport kommutatív!

4. Hányadrendű elemek vannak
a) az $\mathbb{R}^\times := (\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ csoportban;
b) az $\mathbb{R}$ additív csoportjában;
c) a $\mathbb{C}^\times := (\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$ csoportban;
d) $GL_2(\mathbb{R})$-ben, azaz a 2×2-es invertáható valós mátrixok csoportjában;
e)* $GL_2(\mathbb{Q})$-ban?

5. Bizonyítsuk be, hogy egy páros elemszámú véges csoportban mindig van másodrendű elem!

6. Van-e nemtriviális (azaz nem minden elemet az egységelembe vivő) homomorfizmus
a) $\mathbb{C}^\times$-ből $\mathbb{R}^\times$-be;
b) $\mathbb{R}^\times$-ből $\{1, -1\} \leq \mathbb{R}^\times$-be;
c) $(\mathbb{Z}_5, +)$-ból $(\mathbb{Z}_2, +)$-ba;
d) $GL_n(\mathbb{R})$-ből $\mathbb{R}^\times$-be, illetve ennek a pozitív valós számokból álló részcsoportjába?

7. Lássuk be, hogy ha egy $\varphi : G \to H$ homomorfizmus bijektív (azaz φ izomorfizmus), akkor $\varphi(g)$ rendje megegyezik g rendjével minden $g \in G$-re.

8. a) Milyen rendű elemből hány van a D_4 diédercsoportban és a Q kvaterniócsoportban?
b) Adjunk meg egy nemtriviális homomorfizmust D_4-ből Q-ba.
c) Bizonyítsuk be, hogy D_4 és Q nem izomorfak.
d) Bizonyítsuk be, hogy a pozitív valós számok multiplikatív csoportja izomorf a valós számok additív csoportjával.

Hf1. a) Bizonyítsuk be, hogy az $a * b = \dfrac{a+b}{1+ab}$ művelet értelmezve van az $I = (-1, 1) \subseteq \mathbb{R}$ nyílt intervallum minden elemén, és az eredménye is az intervallumba esik.
b) Lássuk be, hogy $(I, *)$ csoport. (*3 pont*)

Hf2. Milyen rendű elemek vannak a D_6 diédercsoportban (a szabályos hatszög egybevágóságainak csoportjában), és melyik rendhez hány olyan rendű elem van? (*2 pont*)