1. Legyen g egy csoportelem, g rendje $o(g) = n$, és $k, m \in \mathbb{Z}$. Lássuk be, hogy
a) $g^m = 1 \Leftrightarrow n \mid m$;
b) $o(g^k) = \dfrac{n}{(n,k)}$.
Fogalmazzuk meg és bizonyítsuk be a megfelelő állításokat végtelen rendre!

Definiáljuk az $AB = \{\, ab \,|\, a \in A,\ b \in B \,\}$ *és* $A^{-1} = \{\, a^{-1} \,|\, a \in A \,\}$ *komplexusműveleteket egy* G *csoport részhalmazain.*

2. Bizonyítsuk be, hogy $\mathcal{P}(G)$ egységelemes félcsoport, de A^{-1} általában nem az A inverze a komplexusszorzásra nézve.

3. Lássuk be, hogy egy $\emptyset \neq H \subseteq G$ részhalmazra
$H \leq G \Leftrightarrow (HH = H$ és $H^{-1} = H) \Leftrightarrow (HH \subseteq H$ és $H^{-1} \subseteq H)$.

4. Mutassuk meg, hogy $A, B \leq G$-re AB akkor és csak akkor részcsoport G-ben, ha $AB = BA$.

5. Legyen A és B a G véges csoport két részcsoportja. Bizonyítsuk be, hogy $|AB| = \dfrac{|A| \cdot |B|}{|A \cap B|}$.

6. Bizonyítsuk be, hogy egy részcsoportnak ugyanannyi jobb oldali mellékosztálya van, mint bal oldali mellékosztálya. Adjunk meg köztük egy természetes bijekciót!

7. Milyen rendű elemek vannak a D_n diédercsoportban, és melyikből hány darab?

8. Bizonyítsuk be, hogy bármely végtelen csoportnak végtelen sok részcsoportja van.

9. Bizonyítsuk be, hogy C_∞ minden nem triviális részcsoportja véges indexű, azaz véges sok mellékosztálya van.

10. Hány különböző homomorfizmus adható meg az alábbi csoportok között?
a) $C_{10} \to C_{33}$ b) $C_n \to C_n$ c) $C_n \to C_m$ d) $C_\infty \to C_n$ e) $C_n \to C_\infty$

Hf1. Bizonyítsuk be, hogy $o(ab) = o(ba)$ egy G csoport tetszőleges a, b elemeire. (*2 pont*)

Hf2. Bizonyítsuk be, hogy a $\mathbb{Z}_2$ fölötti invertálható 3×3-as felső háromszögmátrixok csoportja nem ciklikus. (*2 pont*)