*Algebra 1.* **3. feladatsor** *2022. szeptember 22.*

**1.** Rajzoljuk fel nyilakkal, hogyan hat a $Q$ kvaterniócsoport elemein az $i$-vel, a $D_4$ diédercsoport elemein az $f$-fel, $f^2$-tel, illetve $t$-vel való konjugálás.

**2.** Normálosztó-e a megadott részcsoport a nagy csoportban (ellenőrizzük is, hogy részcsoportról van szó)? Ha nem, mi a legkisebb normálosztó, ami tartalmazza ezt a részcsoportot?
a) $\mathbb{Q}^\times$ az $\mathbb{R}^\times$-ben;
b) a diagonális mátrixok $GL_n(\mathbb{C})$-ben;
c) a skalármátrixok (azaz $cI$ alakúak) $GL_n(\mathbb{R})$-ben;
d) a $\langle t \rangle$ a $D_4$-ben, ahol $t$ az egyik tengelyes tükrözés;
e) $SL_n(K) = \{ A \in K^{n\times n} \mid |A| = 1 \}$ a $GL_n(K)$-ban.

**3.** Legyen $H \leq G$ és $M, N \lhd G$. Bizonyítsuk be, hogy
a) $H \cap N \lhd H$; $N \cap M \lhd G$;
b) $HN \leq G$; $NM \lhd G$;

**4.** Legyen $G$ csoport, és $H \leq G$. Döntsük el, melyek igazak az alábbi állítások közül.
a) Mindig van olyan homomorfizmus $G$-ből, amelynek a magja $H$.
b) Ha $H \lhd G$, akkor van olyan homomorfizmus $G$-ből, amelynek a magja $H$.
c) Mindig van olyan homomorfizmus $G$-be, melynek a képe $H$.
d) Tetszőleges $\varphi : G \to K$ homomorfizmusnál $\varphi(H) \leq K$.
e) Ha $H \lhd G$, és $\varphi : G \to K$ homomorfizmus, akkor $\varphi(H) \lhd K$.
f) Ha $H \lhd G$, és $\varphi : G \to K$ homomorfizmus, akkor $\varphi(H) \lhd \varphi(G)$.

**5.** Legyen $|G| = 91$. Hány olyan $G \to G$ homomorfizmus van, ami $G$-nek legalább két, különböző rendű, az egységtől különböző elemét 1-be viszi?

**6.** Lássuk be, hogy ha $N \lhd G$, és $H \leq G$ úgy, hogy $H \cap N = \{ 1 \}$ és $HN = G$, akkor $G/N \cong H$.

**7.** Határozzuk meg a következő normálosztókkal vett faktorcsoportokat! Tudunk-e a mellékosztályokból olyan reprezentánsrendszert kiválasztani, amelyek részcsoportot alkotnak $G$-ben?
a) $G = GL(n, K)$, $N = SL(n, K)$;
b) $G = D_4$, $N = \langle f^2 \rangle$;
c) $G = (\mathbb{R}, +)$, $N = \mathbb{Z}$;
d) $G = \mathbb{Q}^\times$, $N = \{ \pm 1 \}$;

**8.** Bizonyítsuk be, hogy ha $N \lhd G$, és $\overline{g} := gN$ a $g$-nek megfelelő elem a $G/N$ faktorcsoportban, akkor $o(\overline{g}) = \min \{ k \in \mathbb{N}^+ \mid g^k \in N \}$ (és $\infty$, ha nincs ilyen $k$).

**9.** Határozzuk meg a $G/N$ faktorcsoport rendjét, és a $\overline{g}$ elem rendjét a $G/N$ faktorcsoportban, ha
a) $G = Q$ kvaterniócsoport, $N = \{ \pm 1 \}$, $g = i$;
b) $G = \langle a \rangle \cong C_{60}$, $N = \langle a^{18} \rangle$, $g = a^8$.

**Hf1.** Legyenek $A$ és $B$ a $G$ csoport részcsoportjai, és tegyük föl, hogy $A$ és $B$ kommutatívak, és $G = AB$. Bizonyítsuk be, hogy $A \cap B$ normálosztója $G$-nek. *(2 pont)*

**Hf2.** Legyen $G = \langle a \rangle \cong C_{24}$, és $N = \langle a^{40} \rangle$. Határozzuk meg az $N$ részcsoport (normálosztó) és $G/N$ rendjét. Adjunk meg olyan elemet $g$-ben, amelyre $o(\overline{g}) = 4$ a $G/N$ faktorcsoportban, de $o(g) \neq 4$ az eredeti $G$ csoportban! *(3 pont)*