

1. a) Legyen $g = (123)(45)$, $h = (15324)$. Számítsuk ki a $h^{-1}gh$ és $g^{-1}hg$ elemeket. Hány konjugáltja van g -nek, illetve h -nak S_5 -ben?
- b) Hány olyan elem van S_5 -ben, illetve A_5 -ben, amely az (123) elemet a (245) elembe konjugálja?
2. Milyen elemek cserélhetők fel S_5 -ben az $(12)(34)$, az (123) , illetve az (12345) elemmel?
3. Határozzuk meg S_5 és A_5 konjugáltosztályait és azok elemszámát!
4. Mutassuk meg csupán a konjugáltosztályok elemszámából, hogy
 - a) A_5 egyszerű;
 - b) A_4 -nek a triviális és a teljes csoporton kívül egyetlen normálosztója van, a négyelemű Klein-csoport.

$a, b \in G$ elemek kommutátora $[a, b] = a^{-1}b^{-1}ab$.

$H, K \leq G$ kommutátora $[H, K] = \langle [h, k] \mid h \in H, k \in K \rangle$.

G kommutátor-részcsoportha $G' = [G, G]$.

5. Bizonyítsuk be, hogy
 - a) $[a, b] = 1 \Leftrightarrow ab = ba$;
 - b) $H \leq G$ esetén $[H, G] \leq H \Leftrightarrow H \triangleleft G$;
 - c) G/G' Abel-csoport;
 - d) Ha $\varphi : G \rightarrow H$ homomorfizmus, akkor $\varphi(G') = (\varphi(G))' \leq H'$.
6. Bizonyítsuk be, hogy $H \leq G$ -re

$$G' \leq H \Leftrightarrow H \triangleleft G \text{ és } G/H \text{ Abel.}$$

7. Legyen $G^{(1)} = G'$ és $G^{(i+1)} = [G^{(i)}, G^{(i)}]$ minden i -re. Bizonyítsuk be, hogy G akkor és csak akkor feloldható, ha van olyan r , amelyre $G^{(r)} = 1$.
 8. Lássuk be, hogy feloldható csoport homomorf képe és részcsoportha is feloldható. Bizonyítsuk be, hogy ha $N \triangleleft G$, és N és G/N feloldható, akkor G is feloldható.
 9.
 - a) Bizonyítsuk be, hogy A_n -et generálják a 3-ciklusok $n \geq 3$ esetén.
 - b) Lássuk be, hogy $S'_n = A_n$.
 - c) Határozzuk meg D_4 kommutátor-részcsoporthát.
 10. Adjuk meg S_4 kommutátorláncát.
- Hf1.** Legyen $g = (12)(3456) \in A_6$.
- a) Konjugált-e g az $(1523)(46)$ elemmel S_6 -ban, illetve A_6 -ban. Ha igen, adjunk is meg egy-egy átkonjugáló elemet.
 - b) Mekkora a g elem centralizátora S_6 -ban? (3 pont)
- Hf2.** Határozzuk meg D_6 kommutátor-részcsoporthát és centrumát. (3 pont)