1. Keressünk
a) p-Sylow-részcsoportot S_p-ben;
b) 2-Sylow-részcsoportot S_4-ben és S_6-ban!

2. Hány eleme van a $\mathbb{Z}_2$ fölötti 3×3-as invertálható mátrixok csoportjának, $GL_3(\mathbb{Z}_2)$-nek? Adjuk meg ennek a csoportnak egy 2-Sylow-részcsoportját.

3. Legyen $P \in Syl_p(G)$. Bizonyítsuk be, hogy az alábbi állítások ekvivalensek.
(i) $P \lhd G$;
(ii) $|Syl_p(G)| = 1$;
(iii) P tartalmazza G-nek minden p-hatványrendű részcsoportját;

4. A Sylow-részcsoportok vizsgálatával bizonyítsuk be, hogy minden 91-edrendű csoport ciklikus.

5. Bizonyítsuk be, hogy G nem lehet egyszerű, ha $|G| = 56$, 80 vagy 30.

6. Legyen $H < G$, ahol $|G : H| = n$. Bizonyítsuk be, hogy ekkor G-nek van olyan homomorfizmusa S_n-be, amelynek magja a H-ban van. (Számozzuk meg a H mellékosztályait az $1, 2, \ldots, n$ elemekkel ($i \mapsto Hg_i$), és egy $x \in G$-nek feleltessük meg azt az α permutációt, amelyre $i\alpha = j \Leftrightarrow (Hg_i)x = Hg_j$.)

7. Bizonyítsuk be, hogy egy 36-odrendű csoport nem lehet egyszerű.

8. a) Bizonyítsuk be, hogy A_n-nek nincs n-nél kisebb indexű valódi részcsoportja, ha $n \geq 5$.
b) Bizonyítsuk be, hogy S_n-nek az egyetlen n-nél kisebb indexű valódi részcsoportja az A_n, ha $n \geq 5$.
c) Van-e S_n-ben, illetve A_n-ben n indexű részcsoport?

9. Bizonyítsuk be, hogy a G csoport feloldható, ha
a) $|G| = pq$; b) $|G| = p^2q$; c) $|G| = pqr$, ahol p, q, r különböző prímek.

Hf1. Legyen G egy 140-edrendű csoport. Bizonyítsuk be, hogy G-nek legalább két Sylow-részcsoportja normálosztó! Ezt felhasználva lássuk be, hogy G-ben van 35-ödrenű elem. (*3 pont*)

Hf2. Bizonyítsuk be (Burnside-tétel nélkül!), hogy ha p prím, és $|G| = 8p$, akkor G feloldható. (*3 pont*)

Emlékeztető az első zh-hoz (A zh témája az első 5 feladatsornak és a 6. feladatsor első négy feladatának az anyaga.)

- Csoport, részcsoport, normálosztó, mellékosztályok, komplexusszorzat, és ezek elemszámával, illetve az elemrendekkel kapcsolatos tételek. Ciklikus csoport elemrendjei, részcsoportjai.
- Homomorfizmus és izomorfizmus, mag, kép, homomorfizmustétel.
- Faktorcsoport, faktorcsoport elemeinek rendje, részcsoport, ill. normálosztó képe a faktorizálásnál, izomorfizmustételek.
- Szimmetriacsoportok, D_n, számolás D_n-ben.
- Számolás permutációkkal: ciklusfelbontás; szorzás, hatványozás, konjugálás, paritás eldöntése, elemrend a ciklusfelbontás alapján.
- Konjugáltosztályok, elemek centralizátora, speciálisan S_n-ben és A_n-ben.