1. a) Bizonyítsuk be, hogy az x, y elemek által generált szabad csoportot az $\{ x, xy \}$ halmaz is szabadon generálja.

b) Bizonyítsuk be, hogy ugyanebben a csoportban az $S = \{ x, y^{-1}xy, y^{-2}xy^2 \}$ halmaz szabadon generálja a $\langle S \rangle$ részcsoportot.

2. Bizonyítsuk be a következő izomorfiákat a relációkkal megadott csoportokra.

a) $\langle x, y, z \,|\, x^2 = y^2 = z^3 = 1,\ xy = yx,\ z^{-1}xz = y,\ z^{-1}yz = xy \rangle \cong A_4$;

b) $\langle x, y \,|\, x^2 = y^2 = 1,\ xyxy = yxyx \rangle \cong D_4$;

c) $\langle x, y \,|\, x^2 = y^2 = 1 \rangle$ minden véges nem kommutatív homomorf képe izomorf valamelyik diéder csoporttal.

3*. Bizonyítsuk be, hogy $\langle x, y, z \,|\, y^{-1}xy = x^2,\ z^{-1}yz = y^2,\ x^{-1}zx = z^2 \rangle = 1$.

4. Egy $r \in R$ gyűrűelem idempotens, ha $r^2 = r$. Bizonyítsuk be, hogy ha egy gyűrűnek minden eleme idempotens, akkor a gyűrű kommutatív.

5. Bizonyítsuk be, hogy ha R egységelemes gyűrű, és $a \in R$ nilpotens (azaz van olyan $n > 0$ egész szám, amellyel $a^n = 0$), akkor $1 + a$ invertálható!

6. Mit mondhatunk az olyan R gyűrűről, amelyben minden $a \in R$ elemre a $\{ 0, a \}$ halmaz ideálja R-nek?

7. Adjuk meg a $K[x, y]$ gyűrű (ahol K kommutatív test) x és y^2 által generált ideáljának elemeit. Adjuk meg a faktorgyűrűt az ideál mellékosztályainak egy alkalmas reprezentánsrendszerével. Mik az ideáljai a faktorgyűrűnek?

8. Bizonyítsuk be, hogy $\mathbb{R}[x]/(x^2 + 1) \cong \mathbb{C}$. Határozzuk meg a $\mathbb{C}[x]/(x^2 + 1)$ gyűrű összes ideálját!

9. Adjuk meg a $K[x]/(x^2 + x + 1)$ faktorgyűrű elemszámát, ha $K = \mathbb{Z}_2$, illetve $\mathbb{Z}_3$. Ezek közül melyik faktorgyűrű test?

Hf1. Bizonyítsuk be, hogy $\langle x, y \,|\, y^{-1}xy = x^2,\ x^{-1}yx = y^2 \rangle = 1$. (*3 pont*)

Hf2. Bizonyítsuk be, hogy kommutatív gyűrűben a nilpotens elemek ideált alkotnak! Mutassunk példát nem kommutatív gyűrűre, amelyben a nilpotensek még részgyűrűt sem alkotnak! (*3 pont*)