

1. Határozzuk meg $K^{n \times n}$ jobb- és balideáljait.
 2. Bizonyítsuk be, hogy minden véges, legalább kételemű integritási tartomány test.
 3. Legyen K test, $p(x) \in K[x]$, n -edfokú polinom, és $R = K[x]/I$, ahol $I = (p(x)) \triangleleft K[x]$. Jelöljük α -val a faktorgyűrű $x + I$ elemét.
 - a) Bizonyítsuk be, hogy α gyöke a $p(x)$ polinomnak, és R elemei egyértelműen írhatók α legfőbb $(n - 1)$ -edfokú polinomjaiként.
 - b) Alkalmazzuk az előbbi felírást az $R = K[x]/(p(x))$ faktorgyűrűre is, ahol $K = \mathbb{Z}_2$ és $p(x) = x^3 + x + 1$. Lássuk be, hogy R nyolcelemű test. Mi az $\alpha^2 + 1$ inverze R -ben?
 4. Legyen α az $x^2 - x + 1 \in \mathbb{Q}[x]$ polinom egyik gyöke.
 - a) Hány dimenziós $\mathbb{Q}(\alpha)$ mint \mathbb{Q} fölötti vektortér?
 - b) Bizonyítsuk be, hogy α^7 és α lineárisan összefüggnek ebben a vektortérben.
 5. Bizonyítsuk be, hogy $\mathbb{Q}[x]/(x^2 - 2) \cong \mathbb{Q}[x]/(x^2 - 2x - 1)$.
 6. Adjuk meg $\cos 20^\circ$ minimálpolinomját \mathbb{Q} fölött.
 7. Adjuk meg $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ minimálpolinomját \mathbb{Q} , illetve $\mathbb{Q}(\sqrt{6})$ fölött!
- Hf1.** Írjuk fel a $\mathbb{Z}_2[x]$ gyűrű négyelemű faktorgyűrűinek (azaz másodfokú polinom által generált ideál szerinti faktorgyűrűinek) a szorzástábláját. Hány egymással nem izomorf gyűrűt kapunk ilyen módon? (3 pont)
- Hf2.** Határozzuk meg a $\mathbb{Q}(\sqrt{4 - \sqrt{2}})$ minimálpolinomját \mathbb{Q} fölött! (3 pont)

Emlékeztető a 2. zh-hoz (A zh témája a 6–9. feladatsor anyaga.)

- Direkt szorzat, direkt szorzat elemeinek rendje
- Sylow-tételek, p -Sylowok száma

$$|Syl_p(G)| \equiv 1 \pmod{p}$$

$$|Syl_p(G)| \mid |G : P|$$
 Sylow normálosztó keresése

$$|Syl_p(G)| \stackrel{?}{=} 1$$
 elemszámláló módszer, ha $|Syl_p(G)| = |G : P|$ és a Sylow prímmrendű
- Kommutátor-részcsoport

$$G' = \langle [x, y] \mid x, y \in G \rangle$$
 G a legkisebb normálosztó, amelynek a faktora Abel-csoport
- Feloldhatóság
 G feloldható \Leftrightarrow van Abel faktorú normállánc
 G feloldható, ha a kommutátorlánc leér az 1-ig
 $N \triangleleft G$ esetén G feloldható $\Leftrightarrow N$ és G/N feloldható
 Hivatkozni lehet a bizonyított esetekre: p^n , pq , pqr , p^2q rendű csoportok.
- Normálosztó keresése
 van-e Sylow normálosztó?
 homomorfizmus magja (pl. kis indexű részcsoport mellékosztályain való jobbszorzásnak mint csoportthatásnak a magja)
- Véges Abel-csoportok
 kanonikus alak (prímhatványrendű ciklikusok direkt szorzata)
 elemrendek, adott rendű elemek száma
- Gyűrűk alapfogalmai
 részgyűrű, ideál, faktorgyűrű
 $K[x]$ részgyűrűi, faktorgyűrűi
 speciális elemek: invertálható, idempotens, nilpotens