Egy M additív Abel-csoport jobbmodulus egy R egységelemes gyűrű fölött (jele M_R), ha minden $m \in M$, $r \in R$ elemre értelmezve van $mr \in M$, és teljesülnek a következő axiómák:
(1) $(m + m')r = mr + m'r$
(2) $m(r + r') = mr + mr'$
(3) $m(rr') = (mr)r'$
(4) $m1 = m$
minden $m, m' \in M$, $r, r' \in R$-re,
azaz ha $r \mapsto (m \mapsto mr)$ 1-elemtartó gyűrűhomomorfizmus R-ből $\mathrm{End}(M)$-be, az M Abel-csoport endomorfizmusainak (önmagába menő homomorfizmusainak) gyűrűjébe. Hasonlóan definiálható a balmodulus az rm szorzással.

1. Bizonyítsuk be, hogy
a) Minden V_K vektortér modulus K fölött;
b) minden Abel-csoport modulus $\mathbb{Z}$ fölött;
c) ha R gyűrű, akkor R_R és ${}_RR$ jobb-, illetve balmodulusok (a reguláris jobbmodulus és a reguláris balmodulus);
d) ha S részgyűrű R-ben, és $1 \in S$, akkor R modulus S fölött.

$U \subseteq M_R$ részmodulusa M-nek, ha $U \leq M$ mint Abel-csoport, és $ur \in U$ minden $u \in U$, $r \in R$-re. M egyszerű modulus, ha $0 := \{0\}$-n és M-en kívül nincs más részmodulusa. Féligegyszerűnek hívunk egy modulust, ha egyszerűek direkt összege.

2. Legyen $R = \mathbb{R}^{2\times 2}$, és S az R-beli felső háromszögmátrixok gyűrűje. Tekintsük továbbá azt az $M \subseteq R$ részhalmazt, amely az $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ a & b \end{bmatrix}$ alakú mátrixokból áll.
Jobb-, illetve balmodulus-e M az R, illetve S fölött? Ha igen, egyszerű-e?

3. Legyen $R = K^{n\times n}$, ahol K test (vagy akár csak ferdetest). Álljon M_i azokból az R-beli mátrixokból, amelyeknek az i.-en kívül minden sora $\mathbf{0}$.
a) Bizonyítsuk be, hogy M_i egyszerű jobbmodulus R fölött;
b) Lássuk be, hogy $R_R = M_1 \oplus M_2 \oplus \cdots \oplus M_n$, következésképpen R_R és így minden féligegyszerű gyűrű is féligegyszerű mint önmaga fölötti modulus.

4. Mely Abel-csoportok egyszerűek, illetve féligegyszerűek mint $\mathbb{Z}$-modulusok? És a vektorterek mint K-modulusok?

5. $R = \mathbb{C}[x]$, $V = \mathbb{C}^n$ és $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Bizonyítsuk be, hogy V bal R-modulus az $f(x)v := f(A)v$ hatással.
a) Milyen A mátrix esetén lesz ez a modulus egyszerű?
b) Mikor lesz féligegyszerű?

Hf1. Bizonyítsuk be, hogy egy G csoportra a $G\times G$ csoport diagonális részcsoportja, $T = \{(g, g) \mid g \in G\}$ akkor és csak akkor normálosztó, ha G Abel-csoport. (*2 pont*)

Hf2. Legyen K test. Bizonyítsuk be, hogy a K fölötti $n \times n$-es fölső háromszögmátrixok gyűrűjében ideált alkotnak azok, amelyeknek átlójában csupa 0 áll. Lássuk be, hogy az ehhez az ideálhoz tartozó faktorgyűrű kommutatív. (*3 pont*)