**1.** *Rajzoljuk fel nyilakkal, hogyan hat a $Q$ kvaterniócsoport elemein az $i$-vel, a $D_4$ diédercsoport elemein az $f$-fel, $f^2$-tel, illetve $t$-vel való konjugálás.*

**2.** *Normálosztó-e a megadott részcsoport a nagy csoportban (ellenőrizzük is, hogy részcsoportról van szó)? Ha nem, mi a legkisebb normálosztó, ami tartalmazza ezt a részcsoportot?*

*a) $\mathbb{Q}^\times$ az $\mathbb{R}^\times$-ben;*
*b) a diagonális mátrixok $GL_n(\mathbb{C})$-ben;*
*c) a skalármátrixok (azaz $cI$ alakúak) $GL_n(\mathbb{R})$-ben;*
*d) a $\langle t\rangle$ a $D_4$-ben, ahol $t$ az egyik tengelyes tükrözés;*
*e) $SL_n(K) = \{\, A \in K^{n\times n} \mid |A| = 1 \,\}$ a $GL_n(K)$-ban.*

*Megoldás:* a) $\mathbb{Q}^\times$ részcsoport, mert nem üres, és zárt a szorzásra és az inverzre is. Normálosztó is, mert $\mathbb{R}^\times$ Abel-csoport, tehát minden elem bármivel vett konjugáltja önmaga.

b) Részcsoport (diagonálisok szorzata és inverze is diagonális), de nem normálosztó: a diagonálisak konjugáltjai a diagonalizálható mátrixok, és ezek többnyire nem diagonálisak (pl. $\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 2\end{bmatrix}$ diagonalizálható, mert két különböző sajátértéke van). Szóval a diagonálisak részcsoportja nem zárt a konjugálásra nézve. A generált normálosztó tartalmaz minden diagonalizálható mátrixot, és így a $GL_n(\mathbb{C})$ minden elemét is, mert az SVD-felbontás három diagonalizálható mátrix szorzata (az unitérek diagonalizálhatók, a $\Sigma$ maga diagonális).

c) A skalármátrixok a szorzásra, invertálásra és konjugálásra nézve is zártak, mert $P^{-1}cIP = cP^{-1}IP = cP^{-1}P = cI$. Tehát ez a részhalmaz normálosztó $GL_n(\mathbb{R})$-ben.

d) A $t$ konjugáltja $f$-fel $f^{-1}tf = ttf^{-1}tf = tff = tf^2 \notin \langle t\rangle = \{\,1, t\,\}$, tehát $\langle t\rangle$ nem normálosztó. Az előbbiből az is következik, hogy $f^2 = t\cdot t^f$ benne van a generált normálosztóban, és így az $\{\,1, t, f^2, tf^2\,\}$ halmaz is. Viszont ez a halmaz már zárt a szorzásra (emiatt az invertálásra is, mivel véges csoportban vagyunk), tehát ez a 8 elemű $D_4$-ben egy 2 indexű részcsoport, ezért normálosztó. Azt kaptuk, hogy a $\langle t\rangle$ részcsoportot tartalmazó legkisebb normálosztó $D_4$-ben $\{\,1, t, f^2, tf^2\,\}$.

e) Az 1 determinánsú mátrixok halmaza nem üres ($I$ benne van), zárt a szorzásra és az invertálásra, továbbá a konjugálásra is: $|P^{-1}AP| = |P|^{-1}|A||P| = |A|$. Tehát $SL_n(K) \triangleleft GL_n(K)$.

**3.** *Legyen $H \leq G$ és $M, N \triangleleft G$. Bizonyítsuk be, hogy*

*a) $H \cap N \triangleleft H$; $N \cap M \triangleleft G$;*
*b) $HN \leq G$; $NM \triangleleft G$;*

*Megoldás:* a) Részcsoportok metszete részcsoport, tehát csak a konjugáltságra való zártságot kell belátni.
$x \in H\cap N$, $h \in H \Rightarrow h^{-1}xh \in H$, mert $h, x \in H$ és $h^{-1}xh \in N$, mert $x \in N \triangleleft G$, így $h^{-1}xh \in H \cap N$.
$x \in N \cap M$, $g \in G$-re $g^{-1}xg \in N$ és $\in M$, mert $N$ és $M$ is normálosztó, így $g^{-1}xg \in N \cap M$.

b) $N \triangleleft G \Rightarrow HN = NH \Rightarrow HN \leq G$.
Az előzőből következik, hogy $NM \leq G$. Továbbá $NM$ zárt a $G$ elemeivel való konjugálásra, ugyanis $g \in G$, $n \in N$, $m \in M$-re $g^{-1}nmg = (g^{-1}ng)(g^{-1}mg) \in NM$.

**4.** *Legyen $G$ csoport, és $H \leq G$. Döntsük el, melyek igazak az alábbi állítások közül.*

*a) Mindig van olyan homomorfizmus $G$-ből, amelynek a magja $H$.*

*b) Ha $H \triangleleft G$, akkor van olyan homomorfizmus $G$-ből, amelynek a magja $H$.*
*c) Mindig van olyan homomorfizmus $G$-be, melynek a képe $H$.*
*d) Tetszőleges $\varphi : G \to K$ homomorfizmusnál $\varphi(H) \le K$.*
*e) Ha $H \triangleleft G$, és $\varphi : G \to K$ homomorfizmus, akkor $\varphi(H) \triangleleft K$.*
*f) Ha $H \triangleleft G$, és $\varphi : G \to K$ homomorfizmus, akkor $\varphi(H) \triangleleft \varphi(G)$.*

*Megoldás:* a) Nem igaz, mert a magnak normálosztónak kell lennie.
b) Igen, a $\varphi : G \to G/H$, $\varphi(g) = Hg$ ilyen homomorfizmus.
c) Igen, a $\varphi : H \to G$, $\varphi(h) = h$ ilyen homomorfizmus.
d) Igen, mert $1 = \varphi(1) \in \varphi(H)$, és $h, h' \in H$-ra $\varphi(h)\varphi(h') = \varphi(hh') \in \varphi(H)$ és $\varphi(h)^{-1} = \varphi(h^{-1}) \in \varphi(H)$.
e) Nem igaz, például ha $S \le K$ nem normálosztó, akkor a $\varphi : S \to K$, $\varphi(s) = s$ homomorfizmusra $S \triangleleft S$, de $\varphi(S) = S$ nem normálosztó $K$-ban.
f) Igen. Láttuk d)-ben, hogy részcsoport, és tetszőleges $\varphi(g) \in \varphi(G)$-re, $\varphi(h) \in \varphi(H)$-ra (ahol $h \in H$) $\varphi(g)^{-1}\varphi(h)\varphi(g) = \varphi(g^{-1}hg) \in \varphi(H)$, mert $g^{-1}hg \in H$.

**5.** *Legyen $|G| = 91$. Hány olyan $G \to G$ homomorfizmus van, ami $G$-nek legalább két, különböző rendű, az egységtől különböző elemét 1-be viszi?*

*Megoldás:* $G$ elemeinek rendje csak 91 osztója lehet, tehát $1, 7, 13$ vagy 91. Ha van olyan 91-edrendű elem, amit a homomorfizmus 1-be visz, akkor minden elem az 1-be képződik, ugyanis a 91-edrendű elem szükségképpen generálja a teljes csoportot.
Most tegyük fel, hogy nincs ilyen 91-edrendű elem. Akkor a feladatban szereplő két magbeli elem egyike 7-edrendű, a másik 13-adrendű. De akkor a mag rendje osztható 7-tel és 13-mal, így 91-gyel is, és akkor a mag a teljes csoport, vagyis a homomorfizmus így is csak az azonosan 1 leképezés lehet.

**6.** *Lássuk be, hogy ha $N \triangleleft G$, és $H \le G$ úgy, hogy $H \cap N = \{ 1 \}$ és $HN = G$, akkor $G/N \cong H$.*

*Megoldás:* A $H \cap N = 1$ feltételből következik, hogy $H$ az $N$ minden mellékosztályát legföljebb 1 elemben metszi, ugyanis ha $h_1$ és $h_2$ ugyanabban a mellékosztályban vannak, akkor $h_1h_2^{-1} \in N$, de $h_1h_2^{-1} \in H$ is igaz, így $h_1h_2^{-1} \in H \cap N = 1$, vagyis $h_1 = h_2$. A $HN = G$ (vagy ekvivalensen $NH = G$) feltételből adódik, hogy minden mellékosztályban van $H$-nak eleme: $g \in G$ felírható $g = nh$ alakban, így $Ng = Nh$ tartalmazza a $h$-t. Emiatt a $H \to G/N$, $n \mapsto Nh$ leképezés bijektív, és nyilván művelettartó is.

**7.** *Határozzuk meg a következő normálosztókkal vett faktorcsoportokat! Tudunk-e a mellékosztályokból olyan reprezentánsrendszert kiválasztani, amelyek részcsoportot alkotnak $G$-ben?*
*a) $G = GL(n, K)$, $N = SL(n, K)$;*
*b) $G = D_4$, $N = \langle f^2 \rangle$;*
*c) $G = (\mathbb{R}, +)$, $N = \mathbb{Z}$;*
*d) $G = \mathbb{Q}^\times$, $N = \{ \pm 1 \}$;*

*Megoldás:* a) Teljes reprezentánsrendszert alkotnak azok diagonális a mátrixok, amelyeknek bal felső sarkában tetszőleges $c \ne 0$ elem áll, és a többi diagonális elem 1. Ez részcsoport is, és izomorf $K^\times$-tel, tehát a faktorcsoport is $K^\times$-tel izomorf.
Másképp: $SL(n, K)$ a $\det : GL(n, K) \to K^\times$ homomorfizmus magja, s mivel ez a homomorfizmus szürjektív, a homomorfizmustétel szerint $GL(n, K)/SL(n, K) = GL(n, K)/\operatorname{Ker}\det \cong \operatorname{Im}\det = K^\times$.
b) $|G/N| = 8/2 = 4$, és $G/N$-ben minden elem 2 vagy 1 rendű, mert a $G$-ben is csak $f$ és az inverze nagyobb rendű ennél, de azoknak a négyzete már $N$-ben van. Továbbá bármely két nemtriviális mellékosztály szorzata a harmadik, tehát $G/N$ izomorf a $\mathbb{Z}_2$

fölötti kétdimenziós vektortér additív csoportjával, vagy ha multiplikatív csoportot szeretnénk, a $\operatorname{diag}(\pm 1, \pm 1)$ négyelemű mátrixcsoporttal.

Nincs olyan teljes reprezentánsrendszer, amely részcsoport lenne, mert abban az 1-nek benne kellene lennie, így $f^2$-et már nem tartalmazhatja, viszont az $\{ f, f^{-1} \}$ mellékosztály mindkét elemének a négyzete $f^2$.

c) A $[0,1)$ intervallum elemei teljes reprezentánsrendszert adnak (minden $x \in \mathbb{R}$ osztályában benne van az $\{x\} = x - [x]$, de két különböző, $[0,1)$-beli szám különbsége nem egész), tehát a faktorcsoport a $[0,1)$-gyel izomorf, amelyen a műveletet a mellékosztályok összeadásának megfelelően az $a \dot{+} b := \{a+b\}$ képlettel definiáljuk. Ez a csoport izomorf $\mathbb{C}^\times$-nek a $\{ z \mid |z| = 1 \}$ (multiplikatív!) részcsoportjával, ahol az izomorfizmust az $x \mapsto \cos(2\pi x) + i \sin(2\pi x)$ leképezés adja.

Nem létezik viszont olyan teljes reprezentánsrendszer, amely részcsoportját adná $(\mathbb{R}, +)$-nak, ugyanis a faktorcsoportban van olyan nemtriviális elem (az $\frac{1}{2}$ osztálya), amelynek az önmagával vett összege 0, de $(\mathbb{R}, +)$-ban nincs ilyen.

d) A pozitív racionális számok teljes reprezentánsrendszert adnak, s mivel ezek csoportot is alkotnak a szorzásra nézve, ezzel a csoporttal lesz izomorf a faktorcsoport.

**8.** *Bizonyítsuk be, hogy ha $N \lhd G$, és $\overline{g} := gN$ a $g$-nek megfelelő elem a $G/N$ faktorcsoportban, akkor $o(\overline{g}) = \min \{ k \in \mathbb{N}^+ \mid g^k \in N \}$ (és $\infty$, ha nincs ilyen $k$).*

*Megoldás:* $\overline{1} = \overline{g}^k \Leftrightarrow N = (gN)^k = g^k N \Leftrightarrow g^k \in N$, és $\overline{g}$ rendje a legkisebb ilyen pozitív $k$ (ha létezik ilyen $k$).

**9.** *Határozzuk meg a $G/N$ faktorcsoport rendjét, és a $\overline{g}$ elem rendjét a $G/N$ faktorcsoportban, ha*

*a) $G = Q$ kvaterniócsoport, $N = \{ \pm 1 \}$, $g = i$;*

*b) $G = \langle a \rangle \cong C_{60}$, $N = \langle a^{18} \rangle$, $g = a^8$.*

*Megoldás:* a) $|G/N| = |G|/|N| = 8/2 = 4$. Továbbá $i \notin N$, de $i^2 = -1 \in N$, tehát $o(\overline{i}) = 2$.

b) Érdemes végiggondolni általánosan, hogy $C_n = \langle a \rangle$-ban $\langle a^k \rangle = \langle a^{(k,n)} \rangle$, és ez abból az $n/(n,k)$ darab elemből áll, amely az $a$-nak $(k,n)$-nel osztható kitevős hatványa. Valóban, tudjuk, hogy $(k,n)$ előállítható $k$ és $n$ egész együtthatós $kx + ny$ kombinációjaként, így $a^{(k,n)} = (a^k)^x (a^n)^y = (a^k)^x \in \langle a^k \rangle$, és $(k,n) \mid k$ miatt $a^k \in \langle a^{(k,n)} \rangle$ is igaz. Továbbá az oszthatóság miatt $a^{(k,n)}$-nek pontosan $n/(k,n)$ különböző hatványa van $\langle a \rangle$-ban.

Az előbbiekből következik, hogy $N$ az $a$ 6-tal osztható kitevős hatványaiból áll, így $|N| = 60/6 = 10$, és $|G/N| = 6$. Az $a^8$ hatványai közül a harmadik a legelső olyan, ahol a kitevő osztható 6-tal, tehát $o(\overline{g}) = 3$.

**Hf1.** *Legyenek $A$ és $B$ a $G$ csoport részcsoportjai, és tegyük föl, hogy $A$ és $B$ kommutatívak, és $G = AB$. Bizonyítsuk be, hogy $A \cap B$ normálosztója $G$-nek.* *(2 pont)*

**Hf2.** *Legyen $G = \langle a \rangle \cong C_{24}$, és $N = \langle a^{40} \rangle$. Határozzuk meg az $N$ részcsoport (normálosztó) és $G/N$ rendjét. Adjunk meg olyan elemet $g$-ben, amelyre $o(\overline{g}) = 4$ a $G/N$ faktorcsoportban, de $o(g) \neq 4$ az eredeti $G$ csoportban!* *(3 pont)*