1. *Legyen $H \leq G$ és $M, N \triangleleft G$. Bizonyítsuk be, hogy ha $M \leq N$, akkor G/N homomorf képe G/M-nek.*

Megoldás: A 2. izomorfizmus-tétel szerint $(G/M)/(N/M) \cong G/N$, tehát G/N faktorcsoportja, és így homomorf képe is G/M-nek.

2. *Legyen $N \triangleleft G$. Bizonyítsuk be, hogy a $H \mapsto H/N := \{ Nh \mid h \in H \}$ megfeleltetés a tartalmazási relációt megőrző bijekció a G csoport N-et tartalmazó részcsoportjai és a G/N faktorcsoport részcsoportjai között.*

Megoldás: Jelölje $S(G)$ és $S(G/N)$ a G, illetve G/N részcsoportjainak halmazát, és $S(G)_{\geq N}$ a G N-et tartalmazó részcsoportjainak halmazát. Legyen

$$\Phi : S(G) \to S(G/N), \quad \Phi(H) = \{ Nh \mid h \in H \}$$

($\Phi(H)$ valóban részcsoport, mert $N1 = N$ az egységelem, $Nh_1Nh_2 = Nh_1h_2$, és $(Nh)^{-1} = Nh^{-1}$). És fordítva,

$$\Psi : S(G/N) \to S(G), \quad \Psi(\{ Ng_i \mid i \in I \}) = \bigcup_{i \in I} Ng_i$$

(ez is részcsoportot ad, mert $1 \in N$, és ha $a \in Ng_i$ és $b \in Ng_j$, akkor $ab \in Ng_iNg_j$ és $a^{-1} \in (Ng_i)^{-1}$, ahol $\bar{1} = N$, Ng_iNg_j és $(Ng_i)^{-1}$ is benne vannak a G/N megadott részcsoportjában).
Vegyük észre, hogy Ψ képeként csak N-et tartalmazó részcsoportokat kapunk, mert $\bar{1} = N$ benne van G/N minden részcsoportjában.
Belátjuk, hogy a Φ megszorítása $S(G)_{\geq N}$-re (nevezzük ezt Φ_1-nek) és Ψ egymás inverzei.
Ha $N \leq H \leq G$, akkor $\Psi(\Phi(H)) = \bigcup \{ Nh \mid h \in H \} \subseteq H$, és H minden eleme benne van az unióban, minthogy $h = 1h \in Nh$, így $\Psi(\Phi(H)) = H$.
Fordítva, ha $\mathcal{H} = \{ Ng_i \mid i \in I \} \in S(G/N)$, akkor $\Phi(\Psi(\mathcal{H})) = \{ Nx \mid x \in Ng_i \text{ valamely } i \in I\text{-re} \}$. De az ilyen x-ekre $Nx = Ng_i$, így $\Phi(\Psi(\mathcal{H})) = \mathcal{H}$.
Ezzel bebizonyítottuk, hogy Φ_1 (és ugyanígy Ψ) bijekció $S(G)_{\geq N}$ és $S(G/N)$ között. Nyilvánvaló, hogy Φ_1 (illetve Φ) és Ψ is megőrzi a tartalmazást, azaz ha $H_1 \leq H_2$, akkor $\Phi(H_1) \leq \Phi(H_2)$, és ha $\mathcal{H}_1 \leq \mathcal{H}_2$, akkor $\Psi(\mathcal{H}_1) \leq \Psi(\mathcal{H}_2)$.

3. *Tekintsük a $D_4/\langle f^2 \rangle$ faktorcsoportot. Milyen részcsoportok felelnek meg D_4-ben a faktorcsoport részcsoportjainak?*

Megoldás: A faktorcsoport elemszáma $8/2 = 4$, és az egységelem kivételével minden eleme másodrendű, ugyanis D_4-ben a nem másodrendű elemeknek, f-nek és f^{-1}-nek a négyzete f^2, tehát minden elem négyzete beleesik a normálosztóba. Ebből következik, hogy a faktorcsoport három nem egységeleme három különböző másodrendű részcsoportot generál, és ezen kívül már csak a triviális részcsoport, és a teljes faktorcsoport van. $N = \langle f^2 \rangle = \{ 1, f^2 \}$ önmagától különböző mellékosztályai $\{ f, f^{-1} \}$, $\{ t, tf^2 \}$ és $\{ tf, tf^{-1} \}$, így a D_4/N részcsoportjainak megfelelő részcsoportok D_4-ben N, D_4, továbbá $\{ 1, f^2, f, f^{-1} \} = \langle f \rangle \cong C_4$, $\{ 1, f^2, t, tf^2 \}$ és $\{ 1, f^2, tf, tf^{-1} \}$. Az utóbbiak nem ciklikus csoportok, az identitás és a 180°-os forgatás mellett az egyik a két átlóra való tükrözést tartalmazza, a másik a két középvonalra való tükrözést.

4. *Legyen $N \triangleleft G$ és $N \leq K \leq G$. Bizonyítsuk be, hogy $K \triangleleft G$ akkor és csak akkor, ha $K/N \triangleleft G/N$.*

Megoldás: Ha $K \lhd G$, akkor $x \in K$, $g \in G$ elemekre $(gN)^{-1}xNgN = g^{-1}xgN \in K/N$, mert $g^{-1}xg \in K$.
Most tegyük fel, hogy $K/N \lhd G/N$. Ha $x \in K$ és $g \in G$, akkor $(gN)^{-1}xNgN \in K/N$, ahol $(gN)^{-1}xNgN = g^{-1}xgN$, tehát $g^{-1}xg \in K$. Tehát K zárt a G elemeivel való konjugálásra.

5. *Bizonyítsuk be, hogy ha $N \lhd G$, és $|G : N|$ páros, akkor van olyan H, amelyre $N \leq H \leq G$, és $|H : N| = 2$.*

Megoldás: $|G/N|$ páros, ezért van benne másodrendű elem (ld. az 1. feladatsor 5. feladatát vagy az előadáson később szereplő Cauchy-tételt), ez pedig egy $\mathcal{H}$ másodrendű részcsoportot generál. A 2. feladat szerinti Ψ leképezés a $\mathcal{H}$-hoz olyan H részcsoportot rendel, amely N két mellékosztályának az uniója ($N \cup Nt$ valamely $t \in G$-re), tehát $N \leq H$, és $|H : N| = 2$.

6. *Legyen $N \lhd G$, $H \leq G$, $|G| = 24$, $|N| = 4$, és $|H| = 6$. Hány elemű lehet H képe a $G \to G/N$ homomorfizmusnál? Adjunk is példát mindegyik esetre!*

Megoldás: A 2. feladatban láttuk, hogy H képe HN/N, és ez az 1. izomorfizmustétel szerint $H/H \cap N$-nel izomorf. Viszont $H \cap N$ részcsoportja H-nak és N-nek is, így $|H \cap N|$ osztója 6-ak és 4-nek, tehát $(6, 4) = 2$-nek is, tehát $H \cap N$ rendje 1 vagy 2, így H képe $6/1 = 6$ vagy $6/2 = 3$ elemű. A másodikra példa a $C_{24} = \langle a \rangle$-ban $N = \langle a^6 \rangle$ és $H = \langle a^4 \rangle$, mert ott $H \cap N = \langle a^{12} \rangle$ kételemű. Az elsőre az S_4-ben az első három elemen ható S_3 csoportot vehetjük H-nak, N-nek pedig az S_4 egyetlen négyelemű normálosztóját, a Klein-csoportot.

7. *Hány kompozíciólánca van a D_4 diédercsoportnak, és mivel izomorfak a kompozíciófaktorok?*

Megoldás: D_4 minden nemtriviális normálosztója tartalmazza az f^2-et, ugyanis a forgatások eleve kigenerálják, ha pedig van a normálosztóban egy t tengelyes tükrözés, akkor $f^{-1}tf = ttf^{-1}tf = tf^2$ miatt f^2 is benne van. Tehát a 3. feladat szerint a kompozícióláncban a D_4 alatti normálosztó csak háromféle lehet. Ezek mindegyike Abel-csoport, és az egyik ciklikus, annak csak egy maximális (kételemű) részcsoportja van, a másikaknak viszont három-három. Tehát összesen $1 + 3 + 3 = 7$ kompozíciólánca van D_4-nek, és az egymást követő láncszemek rendjének hányadosa mindig 2, így minden kompozíciófaktor izomorf C_2-vel.

8. *Adjuk meg a $GF(3)$ fölötti 2×2-es invertálható felső háromszögmátrixok csoportjának egy kompozícióláncát! Mik a csoport kompozíciófaktorai?*

Megoldás: Legyen G a feladatban szereplő csoport. $|G| = 2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$, mert az átlóban nem szerepelhet 0. Azok a mátrixok, amelyeknek az átlójában csak 1-ek vannak, nyilván normálosztót alkotnak, legyen ez N. Három ilyen mátrix van, tehát ez egy háromelemű (prím elemszámú) normálosztó, ezért az $1 \lhd N$ lépés nem finomítható. G/N negyedrendű, és az N mellékosztályainak teljes reprezentánsrendszerét adják a diagonális mátrixok. Ezt a negyedrendű csoportot még tovább bonthatjuk, például aszerint, hogy a determináns 1 vagy -1. Azaz legyen M a det leképezés magja (ami nyilván tartalmazza N-et). Ekkor $G/M \cong \mathbb{Z}_3^\times$ miatt $|G : M| = 2$, azaz $|M| = 6$. Az $1 \lhd N \lhd M \lhd G$ sorozat kompozíciólánc, mert minden faktor prímrendű, tehát biztosan nem finomítható tovább. A kompozíciófaktorok C_3, C_2, C_2.