1. *a) Legyen $g = (123)(45)$, $h = (15324)$. Számítsuk ki a $h^{-1}gh$ és $g^{-1}hg$ elemeket. Hány konjugáltja van g-nek, illetve h-nak S_5-ben?*

b) Hány olyan elem van S_5-ben, illetve A_5-ben, amely az (123) elemet a (245) elembe konjugálja?

Megoldás: a) $h^{-1}gh = (542)(13)$, és $g^{-1}hg = (24135)$. A g elem konjugáltjai S_5-ben az ugyanolyan ciklusfelbontású elemek, azaz amelyknek a diszjunkt ciklusokra bontásában egy 3-ciklus és egy 2-ciklus van. Ezekből pedig $\binom{5}{2} \cdot 2 = 20$ van a szimmetrikus csoportban. h konjugáltjai az 5-ciklusok, amelyekből $4! = 24$ van.

b) A konjugálás az $\binom{12345}{abcde}$ elemmel az $(123)(4)(5)$ permutációt az $(abc)(d)(e)$-be viszi, és a második elem minden ilyen elrendezésű felírásához pontosan egy konjugáló elem tartozik. A $(245) = (245)(1)(3)$ elemet $3 \cdot 2 = 6$-féleképpen írhatjuk fel $3 + 1 + 1$-es elrendezésben (a fixpontok helye is számít!), tehát S_5-ben 6 átkonjugáló elem van, legyen ezek halmaza S. Az eredeti felírásokból látjuk, hogy $x = (124)(35) \in S$. Ez az x ugyan páratlan permutáció, de megtoldhatjuk egy olyan páratlan permutációval (a két fixpont felcserélésével), ami helyben hagyja a második elemet, és így már A_5-beli átkonjugáló elemet kapunk. Sőt, az (13)-mal való jobbszorzás (vagy hasonló elven a (45)-tel való balszorzás) az S elemeit úgy állítja párba, hogy egy páros egy páratlannal lesz összepárosítva, ezért A_5-ben $6/2 = 3$ átkonjugáló elem van.

2. *Milyen elemek cserélhetők fel S_5-ben az $(12)(34)$, az (123), illetve az (12345) elemmel?*

Megoldás: Az 1. feladat módszerével azt kell összeszámolnunk, hogy a megadott elemet hányféleképpen lehet felírni, a ciklushosszak (beleértve az 1-ciklusokat) sorrendjét megtartva. Ez a szám az első esetben $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$, a másodikban $3 \cdot 2 = 6$, a harmadikban 5, tehát ennyi elemű az egyes permutációk centralizátora S_5-ben.
De használhatjuk a centralizátor és a konjugáltosztály mérete közötti összefüggést is: $|\mathcal{K}(g)| = |G : C_G(g)|$, azaz véges esetben $|C_G(g)| = |G|/|\mathcal{K}(g)|$. Mivel tudjuk, hogy S_n-ben a konjugáltosztály az ugyanolyan ciklusszerkezetű elemekből áll, az elsőre $120/(5 \cdot 3) = 8$, a másodikra $120/(10 \cdot 2) = 6$, a harmadikra $120/4! = 5$ a centralizátor mérete.

3. *Határozzuk meg S_5 és A_5 konjugáltosztályait és azok elemszámát!*

Megoldás: S_5-ben csak a ciklusszerkezet határozza meg a konjugáltságot, és ehhez a következő elemszámok tartoznak:

$5:$	$4! = 24$
$4+1:$	$5 \cdot 3! = 30$
$3+2:$	$\binom{5}{2} \cdot 2 = 20$
$3+1+1:$	$\binom{5}{2} \cdot 2 = 20$
$2+2+1:$	$\binom{5}{2}\binom{3}{2} \cdot \frac{1}{2} = 15$
$2+1+1+1:$	$\binom{5}{2} = 10$
$1+1+1+1+1:$	1

Összesen $120 = 5!$.
A_5 normálosztó S_5-ben, ezért S_5 néhány teljes konjugáltosztályának az uniója, de ezek a konjugáltosztályok esetleg szétesnek az A_5-ben: amit S_5-belivel át lehet konjugálni, azt nem feltétlenül lehet A_5-belivel is. Az 5-ciklus kivételével a többi (a $3+1+1$, $2+2+1$ és $1+1+1+1+1$) felcserélhető egy alkalmas transzpozícióval, tehát egy páratlan átkonjugáló elemet le lehet cserélni egy párosra (ahogy az előző feladat megoldásában). Viszont a 2. feladatban láttuk, hogy egy g 5-ciklusra $C_{S_5}(g)$ ötelemű, és nyilván tartalmazza g-t, így $C_{S_5}(g) = \langle g \rangle \leq A_5$, azaz $C_{A_5}(g) = A_5 \cap C_{S_5}(g) = C_{S_5}(g)$ 5-elemű, tehát az 5-ciklusok konjugáltosztályának mérete $60/5 = 12$. Összefoglalva:

5:	két 12-elemű konjugáltosztály
3+1+1:	egy 20-elemű konjugáltosztály
2+2+1:	egy 15-elemű konjugáltosztály
1+1+1+1+1:	egy 1-elemű konjugáltosztály,

összesen 60 elem.

4. *Mutassuk meg csupán a konjugáltosztályok elemszámából, hogy*
a) A_5 *egyszerű;*
b) A_4*-nek a triviális és a teljes csoporton kívül egyetlen normálosztója van, a négyelemű Klein-csoport.*

Megoldás: a) Ha $1 \neq N \triangleleft A_5$, akkor N egyrészt teljes konjugáltosztályok uniója, másrészt mivel részcsoport, szükségképpen tartalmazza az 1-et, és a rendje osztója $|A_5| = 60$-nak. Ha 5 nem osztója $|N|$-nek, akkor $|N| \mid 12$, és olyat nem lehet összerakni az $1, 12, 12, 15, 20$ méretű konjugáltosztályokból. Ha osztható 5-tel, akkor $1 \in N$ miatt a két 12-elemű konjugáltosztályt is tartalmazza, tehát $|N| \geq 25$, és ehhez már bármit hozzávennénk, 30-nál nagyobb lenne, tehát csak a teljes A_5-öt kaphatnánk.

b) Könnyen ellenőrizhető, hogy a $V = \{1, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$ halmazban bármely két másodrendű elem szorzata a harmadik (és a négyzetük 1), így V (kommutatív) részcsoport. Másrészt teljes S_4-beli konjugáltosztályok uniója, így S_4-ben, tehát A_4-ben is zárt a konjugálásra nézve. Vagyis V valóban normálosztó.
Könnyen látható, hogy A_4-ben a másodrendű elemek centralizátora V, így ezek egyetlen 3-elemű konjugáltosztályt alkotnak, a harmadrendűeké pedig a generált harmadrendű részcsoport, így azok két 4-elemű konjugáltosztályt alkotnak. Az $1, 3, 4, 4$ méretű osztályokból válogatott, az 1-et tartalmazó halmazok méretei közül csak 1, $1 + 3$ és $1 + 3 + 4 + 4$ osztója 12-nek.

$a, b \in G$ *elemek kommutátora* $[a, b] = a^{-1}b^{-1}ab$.
$H, K \leq G$ *kommutátora* $[H, K] = \langle [h, k] \mid h \in H,\ k \in K \rangle$.
G *kommutátor-részcsoportja* $G' = [G, G]$.

5. *Bizonyítsuk be, hogy*
a) $[a, b] = 1 \iff ab = ba$;
b) $H \leq G$ *esetén* $[H, G] \leq H \iff H \triangleleft G$;
c) G/G' *Abel-csoport;*
d) Ha $\varphi : G \to H$ *homomorfizmus, akkor* $\varphi(G') = (\varphi(G))' \leq H'$.

Megoldás: a) $a^{-1}b^{-1}ab = 1 \Leftrightarrow b^{-1}ab = a \Leftrightarrow ab = ba$.
b) $[h, g] = h^{-1}g^{-1}hg = h^{-1}h^g \in H\ \forall h \in H\ \forall g \in G \Leftrightarrow h^g \in H\ \forall h \in H\ \forall g \in G \Leftrightarrow H \triangleleft G$.
c) $\forall a, b \in G$-re $[aG', bG'] = a^{-1}G'b^{-1}G'aG'bG' = (a^{-1}b^{-1}ab)G' = [a, b]G' = G'$, mert $[a, b] \in G'$. Tehát az a) rész miatt G/G' Abel-csoport.
d) $\varphi([a, b]) = \varphi(a^{-1}b^{-1}ab) = \varphi(a)^{-1}\varphi(b)^{-1}\varphi(a)\varphi(b) = [\varphi(a), \varphi(b)]$, tehát G' generátorelemeinek képei a $\varphi(G)'$ generátorelemei. Másrészt homomorfizmusnál generált részcsoport képe a generátorelemek képei által generált részcsoport, így $\varphi(G') = \varphi(G)'$. Az is nyilvánvaló, hogy részcsoport kommutátor-részcsoportja benne van a nagy csoport kommutátor-részcsoportjában, ezért $\varphi(G)' \leq H'$.

6. *Bizonyítsuk be, hogy* $H \leq G$*-re*

$$G' \leq H \iff H \triangleleft G \text{ és } G/H \text{ Abel.}$$

Megoldás: $\Rightarrow$: $[H, G] \leq [G, G] = G' \leq H$, tehát a b) rész miatt $H \triangleleft G$. és így $\forall a, b \in G$-re $[aH, bH] = [a, b]H$. Viszont $[a, b] \in G' \leq H$, tehát $[aH, bH] = H\ \forall a, b \in G$. Ez az a) rész

szerint éppen azt jelenti, hogy G/H Abel-csoport.
$\Leftarrow$: Az a) rész szerint $\forall a, b \in G$-re $[aH, bH] = H$, és ezt átírva azt kapjuk, hogy $[a, b]H = H$, azaz $[a, b] \in H$ $\forall a, b \in G$-re, amiből $G' \leq H$ következik.

7. *Legyen $G^{(1)} = G'$ és $G^{(i+1)} = [G^{(i)}, G^{(i)}]$ minden i-re. Bizonyítsuk be, hogy G akkor és csak akkor feloldható, ha van olyan r, amelyre $G^{(r)} = 1$.*

Megoldás: Mivel a kommutátor-részcsoport olyan normálosztó, amellyel vett faktor Abel-csoport, a kommutátorlánc egy Abel faktorú normállánc, így ha az leér, akkor a csoport feloldható.
Fordítva, tegyük fel, hogy van egy $G = N_0 > N_1 > \cdots N_k = 1$ normállánc, Abel faktorokkal. Az i-re vonatkozó teljes indukcióval beláthatjuk, hogy ekkor $N_i \geq G^{(i)}$, tehát $G^{(k)} = 1$. Valóban, $i = 0$-ra $G^{(0)} := G = N_0$, és ha i-ig igaz a tartalmazás, akkor N_i/N_{i+1} kommutativitása következtében $N_{i+1} \geq N_i'$, de $N_i \geq G^{(i)}$ miatt $N_i' \geq (G^{(i)})' = G^{(i+1)}$, így $N_{i+1} \geq G^{(i+1)}$ is igaz.

8. *Lássuk be, hogy feloldható csoport homomorf képe és részcsoportja is feloldható. Bizonyítsuk be, hogy ha $N \lhd G$, és N és G/N feloldható, akkor G is feloldható.*

Megoldás: Az 5.d) feladatban láttuk, hogy $(\varphi(G))' = \varphi(G')$, így a kommutátorlánc képe is kommutátorlánc. Ha az eredeti leér az 1-ig, akkor a képe is, tehát feloldható csoport homomorf képe is feloldható.
Az nyilvánvaló, hogy $H \leq G$-re $H' \leq G'$, és ezt rekurzívan alkalmazva azt kapjuk, hogy H kommutátorlánca végig alatta marad G kommutátorláncának, tehát ha az utóbbi leér az 1-ig, akkor az előbbi is. Vagyis feloldható csoport részcsoportja is feloldható.
Legyen $N \lhd G$, és tegyük fel, hogy N és G/N feloldhatók, mondjuk, $N^{(k)} = 1$, és $(G/N)^{(\ell)} = N/N$. Az 5.d) feladatból következik, hogy $G^{(\ell)}N/N = (G/N)^{(\ell)}$, vagyis $G^{(\ell)} \leq N$, ezért $G^{(\ell+k)} \leq N^{(k)} = 1$, következésképpen G is feloldható.

9. *a) Bizonyítsuk be, hogy A_n-et generálják a 3-ciklusok $n \geq 3$ esetén.*
b) Lássuk be, hogy $S_n' = A_n$.
c) Határozzuk meg D_4 kommutátor-részcsoportját.

Megoldás: a) A_n minden eleme páros sok transzpozíció szorzataként írható. Ha ezeket párokba rendezzük, a kapott szorzatok $(ab)(bc)$ vagy $(ab)(cd)$ alakúak lehetnek (ahol a, b, c, d különbözők), és $(ab)(bc) = (acb)$, míg $(ab)(cd) = (ab)(bc)(bc)(cd) = (acb)(bdc)$.
b) $n = 1, 2$-re S_n kommutatív, és $A_n = 1$, tehát akkor igaz az állítás.
Legyen $n \geq 3$. $S_n/A_n \cong C_2$ Abel, ezért $S_n' \leq A_n$. Másrészt minden 3-ciklus kommutátorelem: $(abc) = (abc)^{-1}(abc)^2 = (abc)^{-1}(cba) = (abc)^{-1}(abc)^{(ac)} = [(abc), (ac)]$, és ezek az a) rész szerint generálják A_n-et, tehát $A_n \leq S_n'$.
c) Ha f a 90°-os forgatás és t egy tengelyes tükrözés, akkor $t^{-1}ft = f^{-1}$ miatt $[f, t] = f^{-1}t^{-1}ft = f^{-2} = f^2$, így $f^2 \in D_4'$. Viszont $f^2 \in Z(D_4)$ miatt $\langle f^2 \rangle \lhd D_4$, és $D_4/\langle f^2 \rangle$-ben minden elem négyzete 1, ezért a faktorcsoport Abel. Következésképpen $D_4' \leq \langle f^2 \rangle \leq D_4'$, azaz $D_4' = \langle f^2 \rangle$.

10. *Adjuk meg S_4 kommutátorláncát.*

Megoldás: Láttuk a 9. feladatban, hogy $S_4' = A_4$. Viszont A_4-nek a 4. feladat szerint nincs más normálosztója, mint 1, V és A_4. Mivel $|A_4/V| = 3$, $A_4/V \cong C_3$ Abel, de $A_4/1 = A_4$ nem Abel, tehát V az A_4 legkisebb olyan normálosztója, amelynek faktora Abel. Ebből következik, hogy $A_4' = V$. Végül V maga Abel-csoport, így $V' = 1$. Vagyis a kommutátorlánc: $1 \lhd V \lhd A_4 \lhd S_4$.

Hf1. *Legyen* $g = (12)(3456) \in A_6$.

a) Konjugált-e g *az* $(1523)(46)$ *elemmel* S_6*-ban, illetve* A_6*-ban. Ha igen, adjunk is meg egy-egy átkonjugáló elemet.*

b) Mekkora a g *elem centralizátora* S_6*-ban?* *(3 pont)*

Hf2. *Határozzuk meg* D_6 *kommutátor-részcsoportját és centrumát.* *(3 pont)*