1. *Legyen $M, N \triangleleft G$, és $(|M|, |N|) = 1$. Bizonyítsuk be, hogy ekkor $MN = M \times N$.*

Megoldás: $M \cap N$ részcsoportja M-nek és N-nek, így $|M \cap N|$ osztója $|M|$-nek és $|N|$-nek is, tehát $(|M|, |N|) = 1$-nek is. Vagyis $M \cap N = 1$, következésképpen $MN = M \times N$.

2. *Mutassuk meg, hogy ha $G = A \times B$ direkt szorzat, és $a \in A$, $b \in B$, akkor $o(ab) = [o(a), o(b)]$, feltéve, hogy a és b véges rendűek. Adjunk példát arra, hogy általában nem igaz ez az összefüggés egy csoport két eleme szorzatának a rendjére még akkor sem, ha $\langle a \rangle \cap \langle b \rangle = 1$.*

Megoldás: Tudjuk, hogy $A \times B$-ben A elemei mind felcserélhetők B elemeivel ($[a, b] = a^{-1}(b^{-1}ab) = (a^{-1}b^{-1}a)b$ benne van az A és B normálosztóban is, tehát $A \cap B = 1$-ben is), ezért $(ab)^k = a^k b^k$ minden k-ra. Legyen $o(a) = m$, $o(b) = n$ és $[m, n] = \ell$. Ekkor $(ab)^\ell = a^\ell b^\ell = 1 \cdot 1 = 1$, mivel m és n is osztja ℓ-et. Másrészt ha $(ab)^k = 1$, akkor $a^k b^k = 1$, azaz $a^k = b^{-k} \in A \cap B = 1$, amiből $m \mid k$ és $n \mid k$, következik, vagyis $[m, n] \mid k$. Így valóban $k = [m, n]$ a legkisebb pozitív egész, amelyre $(ab)^k = 1$.

3. *Milyen rendű elemből hány van a következő csoportokban?*

a) $C_6 \times C_8$ *b)* $D_6 \times C_3$ *c)* $C_2 \times C_2 \times C_8$

Megoldás: a) Írjuk fel egy táblázatba a direkt szorzat elemrendjeit úgy, hogy a sorok a C_6-beli elemrendekhez tartoznak, az oszlopok a C_8-beliekhez (zárójelben az adott komponensben az ilyen rendű elemek száma szerepel). A két elem szorzatának rendje a táblázat megfelelő helyén a legkisebb közös többszörös.

$C_6 \setminus C_8$	1 (1 *db*)	2 (1 *db*)	4 (2 *db*)	8 (4 *db*)
1 (1 *db*)	1	2	4	8
2 (1 *db*)	2	2	4	8
3 (2 *db*)	3	6	12	24
6 (2 *db*)	6	6	12	24

Összesítve a direkt szorzat elemrendjei és a hozzájuk tartozó elemszámok:

rend	1	2	3	4	6	8	12	24
elemek	1	3	2	4	6	8	8	16

b)

$D_6 \setminus C_3$	1 (1 *db*)	3 (2 *db*)
1 (1 *db*)	1	3
2 (7 *db*)	2	6
3 (2 *db*)	3	3
6 (2 *db*)	6	6

rend	1	2	3	6
elemek	1	7	8	20

c) Ebben a csoportban minden elem rendje osztója $[2, 2, 8] = 8$-nak. 1 rendű csak 1 darab lehet. 2 rendű az olyan elemek szorzata, amelyeknek a rendje 1 vagy 2 (mindegyik komponensben két ilyen van, az egyetlen másodrendű ciklikus részcsoport elemei), de nem csupa 1, azaz $2 \cdot 2 \cdot 2 - 1 = 7$ másodrendű elem van. 4-edrendű úgy lehet, ha minden komponens rendje osztja 4-et, de van benne 4, de akkor a negyedrendű komponens csak az utolsó lehet, így a negyedrendűek száma $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$. Végül a 8-adrendűek száma hasonlóan $2 \cdot 2 \cdot 4 = 16$. Összefoglalva:

rend	1	2	4	8
elemek	1	7	8	16

4. *Bizonyítsuk be, hogy $(G \times H)' = G' \times H'$ és $Z(G \times H) = Z(G) \times Z(H)$.*

Megoldás: Tekintsük itt a $G \times H$-t külső direkt szorzatnak. Ebben benne van az $\{(x, y) \,|\, x \in G',\ y \in H'\}$ részhalmaz, azaz G' és H' Descartes-szorzata, és ez is zárt a szorzásra és invertálásra, így $G' \times H' \leq G \times H$. $(G \times H)'$ generátorelemei $[(g_1, h_1), (g_2, h_2)] = (g_1, h_1)^{-1}(g_2, h_2)^{-1}(g_1, h_1)(g_2, h_2) = (g_1^{-1}g_2^{-1}g_1g_2,\ h_1^{-1}h_2^{-1}h_1h_2) = ([g_1, g_2], [h_1, h_2]) \in G' \times H'$, így $(G \times H)' \leq G' \times H'$. Fordítva, $G' \times 1$ generátorelemeire $([g_1, g_2], 1) = [(g_1, 1), (g_2, 1)] \in (G \times H)'$, tehát $G' \times 1 \leq (G \times H)'$, és ugyanígy $1 \times H' \leq (G \times H)'$, tehát $G' \times H' = \langle G' \times 1, 1 \times H' \rangle \leq (G \times H)'$. Azt kaptuk, hogy $(G \times H)' = G' \times H'$.
A második egyenlőség pedig látható abból, hogy $(x, y) \in G \times H$-ra:
$(x, y) \in Z(G \times H) \Leftrightarrow (x, y)(g, h) = (g, h)(x, y)\ \forall g \in G,\ h \in H \Leftrightarrow xg = gx$ és $yh = hy$ $\forall g \in G,\ h \in H \Leftrightarrow x \in Z(G)$ és $y \in Z(H) \Leftrightarrow (x, y) \in Z(G) \times Z(H)$.

5. *a) Lássuk be, hogy ha $G/Z(G)$ ciklikus, akkor G Abel-csoport.*
b) Mutassuk meg, hogy minden p^2 rendű csoport Abel (ahol p prím).
c) Bizonyítsuk be, hogy minden p^3 rendű nem kommutatív G csoportra $G' = Z(G)$, és ez egy p-edrendű normálosztó G-ben.

Megoldás: a) Tegyük fel, hogy $G/Z(G)$-t generálja az $a \in G$ elem mellékosztálya. Ebből következik, hogy az $a^n Z(G)$ mellékosztályok ($n \in \mathbb{Z}$) az összes mellékosztály, azaz az uniójuk az egész G. De akkor $\{a\} \cup Z(G)$ generálja a G csoportot. Mivel a generátorrendszer bármely két eleme felcserélhető, az ezekből és inverzeikből alkotott szorzatok is felcserélhetők, tehát G Abel-csoport.

b) Legyen $|G| = p^2$. Tudjuk, hogy véges p-csoport centruma nem lehet egyelemű, másrészt $|Z(G)| \mid |G| = p^2$, így $|Z(G)|$ vagy p vagy p^2 elemű, amiből $G/Z(G)$ vagy 1 vagy p elemű, de mindkét esetben ciklikus. Tehát az a) rész miatt G Abel.

c) Ha $|G| = p^3$ egy p prímre, akkor az előző esethez hasonlóan azt mondhatjuk, hogy $G/Z(G)$ elemszáma csak 1, p vagy p^2 lehet. De az első két esetben $G/Z(G)$ ciklikus, így G Abel lenne, tehát csak az marad, hogy $|G/Z(G)| = p^2$, vagyis $|Z(G)| = p$. A centrum természetesen normálosztó, és $G/Z(G)$ a b) rész szerint Abel, ezért $G' \leq Z(G)$. Viszont a p rendű $Z(G)$-nek az 1-en és $Z(G)$-n kívül nincs más részcsoportja, és G' nem lehet 1, mert G nem Abel, tehát $G' = Z(G)$.

6. *Bizonyítsuk be, hogy $D_6 \cong D_3 \times C_2$.*

Megoldás: Jelöljük ki a szabályos hatszögnek minden második csúcsát. Az ezek által meghatározott szabályos háromszög egybevágóságai a hatszögnek is egybevágóságai, tehát $D_3 \leq D_6$. Ráadásul $|D_6 : D_3| = \frac{12}{6} = 2$, így $D_3 \lhd D_6$. A középpontos tükrözés (180°-os forgatás) nem viszi önmagába a kijelölt háromszöget, így az általa generált másodrendű részcsoport diszjunkt D_3-tól. Továbbá a 180°-os forgatás (f^3) benne van D_6 centrumában ($t^{-1}f^3t = f^{-3} = f^3$ és $f^{-1}f^3f = f^3$ miatt f és t is benne van f^3 centralizátorában, így maga D_6 is), ezért $\langle f^3 \rangle \lhd D_6$. Végül $|D_3 \langle f^3 \rangle| = 6 \cdot 2/1 = 12$ miatt $D_3 \langle f^3 \rangle = D_6$. Szóval D_3 és $\langle f^3 \rangle \cong C_2$ két diszjunkt normálosztó, amelyek kigenerálják D_6-ot, azaz $D_6 = D_3 \times \langle f^3 \rangle \cong D_3 \times C_2$.

7. *Izomorfia erejéig hány Abel-csoport van, amelynek rendje*
a) 32*;*
b) 360*?*

Megoldás: Azt kell összeszámolni mindkét esetben, hogy a rendet hányféleképpen lehet prímhatványok szorzatára bontani, ha a tényezők sorrendje nem számít. Ha több prímosztó van, akkor minden prímre külön számoljuk a megfelelő prímhatvány felbontásait, és ezek számát összeszorozzuk.

a) $32 = 2^5$, így a kitevő összegre bontásai szerint $5 = 5 = 4 + 1 = 3 + 2 = 3 + 1 + 1 = 2 + 2 + 1 = 2 + 1 + 1 + 1 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1$ hét lehetőség van, azaz a hét Abel-csoport a következő: C_{32}, $C_{16} \times C_2$, $C_8 \times C_4$, $C_8 \times C_2 \times C_2$, $C_4 \times C_4 \times C_2$, $C_4 \times C_2 \times C_2 \times C_2$, és $C_2 \times C_2 \times C_2 \times C_2 \times C_2$.

b) $360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$. A 2-hatványt 3-féleképpen (2^3, $2^2 \cdot 2$, $2 \cdot 2 \cdot 2$) lehet felbontani, a 3-hatványt 2-féleképpen, 5-öt meg csak egyféleképpen, így összesen $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ 360-adrendű Abel-csoport van izomorfia erejéig. Ezek kanonikus alakja: $C_8 \times C_9 \times C_5$, $C_4 \times C_2 \times C_9 \times C_5$, $C_2 \times C_2 \times C_2 \times C_9 \times C_5$, $C_8 \times C_3 \times C_3 \times C_5$, $C_4 \times C_2 \times C_3 \times C_3 \times C_5$, $C_2 \times C_2 \times C_2 \times C_3 \times C_3 \times C_5$.

8. *Hány 12-edrendű részcsoportja van a $C_4 \times C_2 \times C_9$ Abel-csoportnak? Ebből hány nem ciklikus?*

Megoldás: Egy 12-edrendű Abel-csoport felbomlik egy 4-edrendű A és egy 3-adrendű B Abel-csoport direkt szorzatára. A elemeinek rendje 2-hatvány, így a $C_4 \times C_2 \times C_9$ direkt szorzatbeli előállításában a harmadik komponens csak 1 lehet, vagyis $A \leq C_4 \times C_2$, és ugyanígy $B \leq C_9$. Ciklikus csoportnak a rendjét osztó d-hez pontosan egy d-edrendű részcsoportja van, így B egyértelmű. Az a kérdés, hogy $C_4 \times C_2$-ben hány negyedrendű részcsoport van. A lehet C_4-gyel vagy $C_2 \times C_2$-vel izomorf. Az első esetben egy negyedrendű elem generálja. Ilyenből $C_4 \times C_2$-ben $2 \cdot 2 = 4$ van, de ketten ugyanazt generálják, tehát két C_4-gyel izomorf részcsoportot találunk. A második esetben A tartalmaz 3 másodrendű elemet, de az egész $C_4 \times C_2$-ben is csak ennyi van, és ezek az 1-gyel együtt valóban részcsoportot alkotnak (ha $C_4 \times C_2 = \langle a \rangle \times \langle b \rangle$, akkor $\langle a^2 \rangle \times \langle b \rangle$ ilyen), tehát $C_2 \times C_2$-ből egy van.
Azt kaptuk, hogy három 12-edrendű részcsoport van, közülük kettőnek a kanonikus alakja $C_4 \times C_3$, egynek pedig $C_2 \times C_2 \times C_3$.
Mivel az első típusnak a maximális elemrendje $[4, 3] = 12$, ez ciklikus, a másodiknak viszont $[2, 3] = 6$, tehát az nem ciklikus. Ez azt jelenti, hogy egyetlen nem ciklikus, 12-edrendű részcsoport van.

Hf1. *Adjuk meg az összes olyan 400-adrendű Abel-csoportot izomorfia erejéig, amelyben nincs 100-adrendű elem. Melyikben van a legkevesebb 10-edrendű elem?* (3 pont)

Hf2. *Hány hatodrendű elem van az $S_5 \times C_3$ csoportban?* (3 pont)