1. *Keressünk*
a) p-Sylow-részcsoportot S_p-ben;
b) 2-Sylow-részcsoportot S_4-ben és S_6-ban!

Megoldás: a) $p!$ csak a p első hatványával osztható, ezért az S_p p-Sylowja csak p-edrendű lehet, ez pedig egy tetszőleges p-ciklus által generált csoport.

b) $|S_4| = 24 = 8 \cdot 3$, így a 2-Sylowja 8-adrendű. Ha D_4-et a négyzet négy csúcsán ható permutációcsoportnak tekintjük (a csúcsok permutációja meghatározza az egybevágóságot is), akkor $D_4 \leq S_4$, és 8-adrendű, tehát 2-Sylow-részcsoport, megadható például mint $\langle(1234), (12)(34)\rangle$, illetve ennek konjugáltjai, amelyek a négyzet csúcsainak más számozásaihoz tartoznak.
S_6-ban 16-odrendű részcsoportot kell keresnünk. Az S_4 2-Sylowja természetesen S_6-ban is benne van. Ezt viszont centralizálja a tőle diszjunkt részcsoportot generáló (56) ciklus, így $\langle(1234), (12)(34), (56)\rangle = \langle(1234), (12)(34)\rangle \times \langle(56)\rangle \cong D_4 \times C_2$ 16-elemű, tehát 2-Sylow S_6-ban.

2. *Hány eleme van a $\mathbb{Z}_2$ fölötti 3×3-as invertálható mátrixok csoportjának, $GL_3(\mathbb{Z}_2)$-nek? Adjuk meg ennek a csoportnak egy 2-Sylow-részcsoportját.*

Megoldás: Egy 3×3-as mátrix pontosan akkor invertálható, ha a három sora független. Tehát $GL_2(\mathbb{Z}_3)$-nak annyi eleme van, ahányféleképpen ki lehet választani három független vektort $\mathbb{Z}_2^3$-ból. Az első sor bármely nem nulla vektor lehet, tehát $2^3 - 1 = 7$-féle, a második sor nem lehet ennek skalárszorosa, így ennek a kiválasztására $2^3 - 2 = 6$ lehetőség van, végül a harmadik bármi lehet, ami nem függ ettől a két független vektortól, s mivel ezeknek $2^2 = 4$ különböző lineáris kombinációja van, a harmadik sor $2^3 - 2^2 = 4$-féle lehet. Tehát $|GL_2(\mathbb{Z}_3)| = 7 \cdot 6 \cdot 4 = 168$.
$168 = 2^3 \cdot 3 \cdot 7$, így a csoport 2-Sylowja 8-elemű. Ilyen méretű részcsoportot viszont könnyen találunk: az invertálható felső háromszögmátrixok nyilván részcsoportot alkotnak, és ezekből éppen 8 darab van (az átlós elemek csak 1-ek lehetnek, és a fölötte levő három mindegyike 0 vagy 1).

3. *Legyen $P \in Syl_p(G)$. Bizonyítsuk be, hogy az alábbi állítások ekvivalensek.*
(i) $P \lhd G$;
(ii) $|Syl_p(G)| = 1$;
(iii) P tartalmazza G-nek minden p-hatványrendű részcsoportját;

Megoldás: $(i) \Rightarrow (ii)$: A Sylow-tételek szerint P-t mindegyik p-Sylowba el lehet konjugálni, viszont ha P normálosztója G-nek, akkor P minden konjugáltja önmaga, így $Syl_p(G) = \{P\}$.
$(ii) \Rightarrow (iii)$: Az első Sylow-tétel erősebb változata kimondja, hogy bármely p-részcsoportot tartalmazza valamelyik Sylow-féle p-részcsoport. De a (ii) szerint csak egy p-Sylow van, így P tartalmazza az összes p-részcsoportot.
$(iii) \Rightarrow (i)$: P minden konjugáltja p-hatványrendű részcsoport, tehát a feltevés szerint benne van P-ben. Ez épp azt jelenti, hogy $P \lhd G$.

4. *A Sylow-részcsoportok vizsgálatával bizonyítsuk be, hogy minden 91-edrendű csoport ciklikus.*

Megoldás: Legyen $|G| = 91 = 7 \cdot 13$, és $P_7 \in Syl_7(G)$, $P_{13} \in Syl_{13}(G)$.
Mivel $|Syl_7(G)| \equiv 1 \pmod 7$ és osztója 13-nak, $|Syl_7(G)| = 1$, és így $P_7 \lhd G$. Ugyanígy $|Syl_{13}(G)| \equiv 1 \pmod{13}$ és osztója 7-nek, tehát $|Syl_{13}(G)| = 1$, és így $P_{13} \lhd G$. De a P_7 és P_{13} normálosztókra $P_7 \cap P_{13} = 1$, mert relatív prím rendűek, és $|P_7 P_{13}| = \frac{|P_7||P_{13}|}{|P_7 \cap P_{13}|} =$

$91 = |G|$ miatt $P_7P_{13} = G$, tehát $G = P_7 \times P_{13} \cong C_7 \times C_{13} \cong C_{91}$, ahol kihasználjuk, hogy P_7 és P_{13} prímrendű, tehát ciklikus, és hogy relatív prím rendű ciklikusok direkt szorzata maga is ciklikus (a komponensek generátorelemei szorzatának rendje az egyes komponensek rendjének legkisebb közös többszöröse, de ebben az esetben szorzata, és az éppen a teljes csoport rendje).

5. *Bizonyítsuk be, hogy G nem lehet egyszerű, ha $|G| = 56$, 80 vagy 30.*

Megoldás: Ha $|G| = 56$, és $P \in Syl_7(G)$, akkor $|Syl_7(G)| \equiv 1 \pmod 7$, és $|Syl_7(G)| \mid |G : P| = 8$ miatt $|Syl_7(G)| = 1$ vagy 8. Az első esetben $P \lhd G$, tehát G nem egyszerű. Ha viszont 8 darab 7-Sylow van, akkor — mivel ezek prímrendű csoportok, tehát nem metszhetnek egymásba — a 7-Sylowok összesen tartalmaznak $8 \cdot 6 = 48$ darab 7-edrendű elemet. Így G-ben legföljebb $56 - 48 = 8$ nem hetedrendű elem van. Tetszőleges 2-Sylow csak ebben a 8-elemű halmazban lehet benne, de a 2-Sylowok is 8 eleműek, ezért ezek mind megegyeznek, azaz a 2-Sylow normálosztó. Így arra jutottunk, hogy ebben az esetben sem egyszerű a G csoport.
Ha $|G| = 80$, akkor $|Syl_5(G)| \equiv 1 \pmod 5$, és $|Syl_5(G)| \mid 16$, ezért $|Syl_5(G)| = 1$ vagy 16. Ugyanúgy, mint az előző esetben, vagy azt kapjuk, hogy az 5-Sylow normálosztó, vagy elemszámlálással látjuk, hogy az 5-ödrendű elemek lefednek 64 elemet a 80-ból, tehát a maradék 16-elemű halmazba már csak egy 2-Sylow fér bele, ezért ilyenkor a 2-Sylow lesz normálosztó.
Ha $|G| = 30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$, akkor $|Syl_5(G)| \equiv 1 \pmod 5$, és $|Syl_5(G)| \mid |G : P| = 6$ miatt $|Syl_5(G)| = 1$ vagy 6. Az első esetben az 5-Sylow normálosztó. A másodikban az előző esethez hasonlóan azt kapjuk, hogy G-ben $6 \cdot 4 = 24$ ötödrendű elem van, ezért az összes 3- és 2-Sylow benne van egy 6 elemű részhalmazban. De ha a 3-Sylow nem normálosztó, akkor a $|Syl_3(G)| \equiv 1 \pmod 3$ feltétel miatt, legalább 4 darab 3-Sylow van, azoknak pedig (mivel ezek is prím elemszámúak, és így diszjunktak) összesen legalább $4 \cdot 2 = 8$ harmadrendű eleme lenne, ami nem fér el a hatelemű halmazban. Tehát az 5- vagy a 3-Sylow normálosztó.

6. *Legyen $H < G$, ahol $|G : H| = n$. Bizonyítsuk be, hogy ekkor G-nek van olyan homomorfizmusa S_n-be, amelynek magja a H-ban van. (Számozzuk meg a H mellékosztályait az $1, 2, \ldots, n$ elemekkel ($i \mapsto Hg_i$), és egy $x \in G$-nek feleltessük meg azt az α permutációt, amelyre $i\alpha = j \Leftrightarrow (Hg_i)x = Hg_j$.)*

Megoldás: Legyen $\{ g_1, g_2, \ldots, g_n \}$ egy teljes reprezentánsrendszer a H mellékosztályaiból, azaz a H különböző mellékosztályai $Hg_1 = H, Hg_2, \ldots, Hg_n$. Egy $x \in G$ elemhez rendelje hozzá a $\varphi : G \to S_n$ leképezés az $\{ 1, 2, \ldots, n \}$ halmaznak azt a permutációját, amely i-t akkor viszi j-be, ha $Hg_ix = Hg_j$. Ez nyilván homomorfizmus S_n-be, ugyanis $Hg_i(xy) = (Hg_ix)y$. Ha $x \in \operatorname{Ker}\varphi$, akkor $Hg_ix = Hg_i$ minden i-re, speciálisan $i = 1$-re $Hx = H$, amiből $x \in H$ következik. Ezért $\operatorname{Ker}\varphi \leq H$.

7. *Bizonyítsuk be, hogy egy 36-odrendű csoport nem lehet egyszerű.*

Megoldás: Ha $|G| = 36 = 2^2 3^2$, akkor G 3-Sylow-részcsoportja 9-elemű, tehát 4 indexű részcsoport, legyen ez P_3. Az előző feladat szerint van olyan $\varphi : G \to S_4$ homomorfizmus, amelynek magja a P_3-ban van, tehát nem a teljes G, másrészt $\operatorname{Ker}\varphi \neq 1$, mert $G/\operatorname{Ker}\varphi \cong \operatorname{Im}\varphi \leq S_4$, és $|G| > 24 = |S_4|$. Tehát $\operatorname{Ker}\varphi$ valódi normálosztó, és így G nem lehet egyszerű.

8. *a) Bizonyítsuk be, hogy A_n-nek nincs n-nél kisebb indexű valódi részcsoportja, ha $n \geq 5$.*
b) Bizonyítsuk be, hogy S_n-nek az egyetlen n-nél kisebb indexű valódi részcsoportja az A_n, ha $n \geq 5$.

c) Van-e S_n-ben, illetve A_n-ben n indexű részcsoport?

Megoldás: a) Ha A_n-ben H egy k indexű részcsoport, ahol $1 < k < n$, akkor a 6. feldat szerint létezne olyan $\varphi : A_n \to S_k$ homomorfizmus, amelyre $\operatorname{Ker}\varphi \leq H$. Másrészt $|A_n| = \frac{n!}{2} > (n-1)! \geq k!$, ha $n \geq 3$, tehát $\operatorname{Ker}\varphi \neq 1$. Ez ellentmond annak, hogy A_n egyszerű.

b) Először lássuk be, hogy S_n normálosztói $n \geq 5$ esetén csak 1, A_n és S_n. Ugyanis ha N valódi (nem 1 és nem a teljes csoport) normálosztó, akkor $N \cap A_n \triangleleft A_n$, de A_n egyszerű, így $N \cap A_n = A_n$ vagy 1. Az első esetben $A_n \leq N \leq S_n$ és $|S_n : A_n| = 2$ miatt $N = A_n$. A másodikban $A_nN = A_n \times N \leq S_n$, tehát $N \neq 1$ esetén $|N| = 2$, és $S_n = A_n \times N$. Viszont akkor $N \leq Z(S_n) = 1$ ellentmondás.
Most a 6. feladat módszerét használva ($|S_n| = n! > k! = |S_k|$ miatt) azt kapjuk, hogy S_n-nek van H-beli nem triviális normálosztója. $k > 2$ esetén ez ellentmond annak, hogy S_n-nek csak a fent felsorolt 3 normálosztója van. $k = 2$ esetén maga a H normálosztó, így csak $H = A_n$ lehet.

c) Igen, S_{n-1}, illetve A_{n-1} ilyen.

9. *Bizonyítsuk be, hogy a G csoport feloldható, ha*
a) $|G| = pq$; b) $|G| = p^2q$; c) $|G| = pqr$, ahol p, q, r különböző prímek.

Megoldás: a) Legyen $p > q$. Ekkor a $|Syl_p(G)| \equiv 1 \pmod p$ és $|Syl_p(G)| \mid q$ feltétel miatt $|Syl_p(G)| = 1$, tehát a p-Sylow normálosztó.

b) Ha $p > q$, akkor az előző esethez hasonlóan azt kapjuk, hogy a p-Sylow normálosztó. Tegyük fel most, hogy $p < q$. Ekkor $|Syl_q(G)| \equiv 1 \pmod q$, és $|Syl_q(G)| \mid p^2$. Ha $|Syl_q(G)| = 1$, akkor a q-Sylow normálosztó. $|Syl_p(G)|$ nem lehet p, mert $1 < p < q$. Végül ha $|Syl_p(G)| = p^2$, akkor összesen $p^2(q-1) = p^2q - p^2$ darab q-adrendű eleme van G-nek, így a többi elem egy p^2 rendű részhalmazban van, s ezért csak egyetlen p-Sylowja lehet G-nek, vagyis ebben az esetben a p-Sylow lesz normálosztó.

c) Feltehetjük, hogy $p > q > r$. A p-Sylowok száma osztója qr-nek, de mivel 1 maradékot ad p-vel osztva, sem q, sem r nem lehet. Tehát vagy normálosztó a p-Sylow, vagy $|Syl_p(G)| = qr$, és így G-nek van $qr(p-1) = pqr - qr$ p-edrendű eleme, és az összes q- és r-Sylow benne van a maradék qr elemű részhalmazban. Ha a q-Sylow nem normálosztó, akkor legalább $q+1$ q-Sylow van G-ben, és így van legalább $(q+1)(q-1) = q^2 - 1$ darab q-adrendű elem. Viszont $q^2 - 1 > q^2 - q = q(q-1) \geq qr$, tehát ennyi nem fér el a qr elemű részhalmazban. Tehát ekkor a q-Sylow lesz normálosztó.
(Valójában a második esetben is normálosztó a p-Sylow, ugyanis ha $Syl_q(G) = \{ Q \}$, akkor a G/Q csoportnak az a) rész szerint normálosztó a p-Sylowja. Ennek a p-Sylownak az ősképe $N \triangleleft G$, amelyre $|N| = pq$. Viszont N-nek szintén az a) rész szerint normálosztó a p-Sylowja, P, és és minden $g \in G$-re $P^g \leq N^g = N$ miatt P^g is p-Sylowja N-nek, tehát $P^g = P$. Vagyis $P \triangleleft G$.)

Hf1. *Legyen G egy 140-edrendű csoport. Bizonyítsuk be, hogy G-nek legalább két Sylow-részcsoportja normálosztó! Ezt felhasználva lássuk be, hogy G-ben van 35-ödrenű elem.* *(3 pont)*

Hf2. *Bizonyítsuk be (Burnside-tétel nélkül!), hogy ha p prím, és $|G| = 8p$, akkor G feloldható.* *(3 pont)*