**1.** *a) Bizonyítsuk be, hogy az $x, y$ elemek által generált szabad csoportot az $\{x, xy\}$ halmaz is szabadon generálja.*

*b) Bizonyítsuk be, hogy ugyanebben a csoportban az $S = \{x, y^{-1}xy, y^{-2}xy^2\}$ halmaz szabadon generálja a $\langle S\rangle$ részcsoportot.*

*Megoldás:* a) A szabad csoport univerzalitása miatt az $x \mapsto x$, $y \mapsto xy$ leképezésnek van olyan $f : F(x, y) \to F(x, y)$ kiterjesztése, amely homomorfizmus. Fordítva, van olyan $g : F(x, y) \to F(x, y)$, amelyre $g : x \mapsto x$ és $xy \mapsto y$, ugyanis az $x \mapsto x$, $y \mapsto x^{-1}y$ leképezés kiterjed, és az így kapott homomorfizmusra $xy \mapsto x(x^{-1}y) = y$. A $g \circ f$ homomorfizmus $x$-et $x$-be, $y$-t pedig $y$-ba viszi, s mivel ezek $f(x, y)$-nak generátorelemei $g \circ f = \mathrm{id}_{F(x,y)}$. Másrészt $f \circ g$ az $x$-et $x$-be, az $xy$-t $xy$-be viszi, így $y = x^{-1}(xy)$ képe $x^{-1}(xy) = y$, tehát $f \circ g = \mathrm{id}_{F(x,y)}$ is igaz. Azt kaptuk, hogy $f$ olyan automorfizmusa (azaz önmagába menő izomorfizmusa) $F(x, y)$-nak, amely az $\{x, y\}$ szabad generátorrendszert $\{x, xy\}$-ba viszi, így az utóbbi is szabad generátorrendszer.

b) Vegyük azt az $F(u, v, w)$ szabad csoportból $F(x, y)$-ba menő homomorfizmust, amely az $u \mapsto x$, $v \mapsto y^{-1}xy$, $w \mapsto y^{-2}xy^2$ leképezés kiterjesztése. Ez egy $n$ hosszúságú redukált szóhoz olyan $F(x, y)$-beli szót rendel, amelynek a redukált alakjában az $x^{\pm1}$ megjelenéseinek a száma pontosan $n$, ugyanis az azonos típusú ($u$, $v$ vagy $w$, illetve ezek inverzei) összevonásából keletkezett részszó redukált alakjának elején és végén ugyanaz az $y$-hatvány szerepel, ami az $u$, $v$, illetve $w$ elején és végén, és csak a belső $y$-ok esnek ki, és ezután a különböző blokkok összeszorzásánál nem nyelődik el a teljes $y$-hatvány, így az $x$-ek végig ugyanolyan kitevőn maradnak. Ez azt jelenti, hogy a leképezés magjában csak az 1 van, tehát $\langle S\rangle$ izomorf a három elemmel generált szabad csoporttal, ahol a szabad generátorok az $S$ elemei.

**2.** *Bizonyítsuk be a következő izomorfiákat a relációkkal megadott csoportokra.*

*a)* $\langle x, y, z \mid x^2 = y^2 = z^3 = 1,\ xy = yx,\ z^{-1}xz = y,\ z^{-1}yz = xy\rangle \cong A_4$;

*b)* $\langle x, y \mid x^2 = y^2 = 1,\ xyxy = yxyx\rangle \cong D_4$;

*c)* $\langle x, y \mid x^2 = y^2 = 1\rangle$ *minden véges nem kommutatív homomorf képe izomorf valamelyik diéder csoporttal.*

*Megoldás:* a) Az $A_4$-ben $a = (12)(34)$, $b = (13)(24)$ és $c = (132)$ kielégítik az $a^2 = b^2 = c^3 = 1$, $ab = ba$, $a^c = b$ és $b^c = ab$ relációkat, és $A_4 = \langle a, b, c\rangle$ ezért a Dyck-tétel szerint $A_4$ homomorf képe a relációkkal megadott $G$ csoportnak. Másrészt $G$-ben $xy = yx$ miatt $\langle x\rangle, \langle y\rangle \lhd \langle x, y\rangle$, így $|\langle x, y\rangle| = |\langle x\rangle \langle y\rangle| \le |\langle x\rangle| \cdot |\langle y\rangle| \le 2 \cdot 2 = 4$, és $z \in N_G(\langle x, y\rangle)$ mert mindkét generátorelemet a részcsoporton belülre konjugálja, ezért $\langle x, y\rangle \lhd \langle x, y, z\rangle = G$, amiből $|G| = |\langle x, y\rangle \langle z\rangle| \le |\langle x, y\rangle| \cdot |\langle z\rangle| \le 4 \cdot 3 = 12 = |A_4|$, így a $G$-ből $A_4$-be menő szürjektív homomorfizmus csak izomorfizmus lehet.

b) $D_4 = \langle t, f\rangle = \langle t, tf\rangle$, és a $t, tf$ generátorok kielégítik a megadott relációkat: $t^2 = 1$, $(tf)^2 = 1$, és $t(tf)t(tf) = ff = f^2$ egyenlő $(tf)t(tf)t = tfft = t^{-1}f^2t = f^{-2} = f^2$-tel, tehát $D_4$ homomorf képe a relációkkal megadott $G$ csoportnak. Másrészt $G$-ben $1 = xyxyx^{-1}y^{-1}x^{-1}y^{-1} = xyxyxyxy = (xy)^4$, és $x^{-1}(xy)x = yx = y^{-1}x^{-1} = (xy)^{-1}$, így $\langle xy\rangle \lhd \langle xy, x\rangle = \langle x, y\rangle = G \Rightarrow |G| = |\langle xy\rangle \langle x\rangle| \le |\langle xy\rangle| \cdot |\langle x\rangle| \le 4 \cdot 2 = 8$, tehát a $G$-ből $D_4$-be menő szürjektív homomorfizmus csak izomorfizmus lehet.

c) Tegyük fel, hogy $H$ véges nem kommutatív csoport, mely homomorf képe a megadott relációkkal generált csoportnak. Ekkor $H = \langle a, b\rangle$, ahol $a^2 = b^2 = 1$. Legyen $n = o(ab)$. Mivel $a^{-1}(ab)a = ba = b^{-1}a^{-1} = (ab)^{-1}$, a $H = \langle a, b\rangle = \langle ab, a\rangle$ csoport homomorf képe a $G = \langle x, y \mid x^n = 1,\ y^2 = 1,\ y^{-1}xy = x^{-1}\rangle$ relációkkal definiált csoportnak, és ugyanígy $D_n = \langle f, t\rangle$ is homomorf képe $G$-nek. Viszont $|G| = |\langle x\rangle \langle y\rangle| \le 2n$, míg $\langle ab\rangle < H$, mivel $H$ nem kommutatív, tehát $|H| \ge 2n$, és $|D_n| = 2n$, tehát mindkét homomorfizmus izomorfizmus, és így $H \cong G \cong D_n$.

**3*.** *Bizonyítsuk be, hogy* $\langle x, y, z \,|\, y^{-1}xy = x^2,\ z^{-1}yz = y^2,\ x^{-1}zx = z^2 \rangle = 1$.

**4.** *Egy* $r \in R$ *gyűrűelem idempotens, ha* $r^2 = r$. *Bizonyítsuk be, hogy ha egy gyűrűnek minden eleme idempotens, akkor a gyűrű kommutatív.*

*Megoldás:* Legyen $a \in R$ tetszőleges elem. A feltétel szerint $a + a = (a + a)^2 = a^2 + a^2 + a^2 + a^2 = a + a + a + a$, amiből $a + a$-t kivonva azt kapjuk, hogy $a + a = 0$, azaz $a = -a$ minden $a \in R$-re.
Most tetszőleges $x, y \in R$-re $x + y = (x + y)^2 = x^2 + y^2 + xy + yx = x + y + xy + yx \Rightarrow xy + yx = 0 \Rightarrow yx = -xy = xy$ az előbbiek szerint, tehát $R$ valóban kommutatív.

**5.** *Bizonyítsuk be, hogy ha* $R$ *egységelemes gyűrű, és* $a \in R$ *nilpotens (azaz van olyan* $n > 0$ *egész szám, amellyel* $a^n = 0$*), akkor* $1 + a$ *invertálható!*

*Megoldás:* Ha $a^n = 0$, akkor $(1+a)(1-a+a^2-a^3+\ldots+(-1)^{n-1}a^{n-1}) = 1+(-1)^n a^n = 1$, és a másik sorrendben vett szorzatuk ugyanígy 1, tehát $1 + a$ invertálható, és az inverze $1 - a + a^2 - a^3 + \ldots$.

**6.** *Mit mondhatunk az olyan* $R$ *gyűrűről, amelyben minden* $a \in R$ *elemre a* $\{0, a\}$ *halmaz ideálja* $R$*-nek?*

*Megoldás:* Először is $a+a$ csak 0 lehet, tehát a gyűrű additív csoportja $\mathbb{Z}_2$ fölötti vektortér. Másrészt ha $|R| \geq 3$, akkor tetszőleges $a \neq 0$ és $b \neq a$ elemre $ab, ba \in \{a, 0\} \cap \{b, 0\} = \{0\}$, tehát $ab = ba = 0$. Viszont van $b \in R \setminus \{a, 0\}$, és arra $a + b \neq a$ , ezért $0 = a(a + b) = aa + ab = aa$ is igaz, így $R$ csak zérógyűrű lehet.
$|R| \leq 2$ esetén a feltétel semmitmondó, $\{0\}$ és $R$ nyilván mindig ideálja $R$-nek. A zérógyűrűkön kívül ez még a $\mathbb{Z}_2$-t adja.

**7.** *Adjuk meg a* $K[x, y]$ *gyűrű (ahol* $K$ *kommutatív test)* $x$ *és* $y^2$ *által generált ideáljának elemeit. Adjuk meg a faktorgyűrűt az ideál mellékosztályainak egy alkalmas reprezentánsrendszerével. Mik az ideáljai a faktorgyűrűnek?*

*Megoldás:* Az összes olyan polinom benne van a generált ideálban, amelyben az 1 és az $y$ együtthatója 0, és ezek valóban ideált alkotnak. Így teljes reprezentánsrendszert adnak az $a + by$ $(a, b \in K)$ alakú polinomok. A faktorgyűrű elemein a szorzást az $(a + by)(c + dy) = ac + (bc + ad)y$ szabállyal adhatjuk meg. Ebben tetszőleges $a + by$ polinom, ahol $a \neq 0$, kigenerálja a teljes faktorgyűrűt, ugyanis $(a + by)(\frac{1}{a} - \frac{b}{a^2}y) = 1$, viszont tetszőleges $by$ $(b \neq 0)$ az összes többi elemből álló $(y)$ ideált generálja. Tehát a faktorgyűrűnek a nyilvánvaló egyelemű és teljes ideálján kívüli egyetlen ideálja az $(y)$.

**8.** *Bizonyítsuk be, hogy* $\mathbb{R}[x]/(x^2 + 1) \cong \mathbb{C}$. *Határozzuk meg a* $\mathbb{C}[x]/(x^2 + 1)$ *gyűrű összes ideálját!*

*Megoldás:* Az $x^2 + 1$ által generált $I$ ideál az $x^2 + 1$ többszöröseiből áll, és a hozzá tartozó mellékosztályoknak reprezentánsrendszerét adják a legföljebb elsőfokú polinomok. Ha a faktorgyűrű műveleteit ezeken a reprezentánselemeken adjuk meg, akkor azt kapjuk, hogy
$(a + bx) + (c + dx) = (a + c) + (b + d)x$,
$(a + bx)(c + dx) = ac + (ad + bc)x + bdx^2 \equiv ac + (ad + bc)x - bd = (ac - bd) + (ad + bc)x$.
Ebből következik, hogy a $\varphi : \mathbb{R}[x]/(x^2 + 1) \to \mathbb{C}$, $\varphi : a + bx + I \mapsto a + bi$ leképezés bijektív és művelettartó is, tehát izomorfizmus.
A $\mathbb{C}[x]/(x^2 + 1)$ faktorgyűrű elemei azonosíthatók az $I = (x^2 + 1)$ ideál mellékosztályainak reprezentánsrendszerével, a $\{u + vx \,|\, u, v \in \mathbb{C}\}$ halmazzal, ahol az összeadás és a szorzás az $x^2 = -1$ összefüggés figyelembevételével történik. Ebből következik, hogy a faktorgyűrű $\mathbb{C}$

fölött kétdimenziós vektorteret alkot, tehát valódi ideáljai csak egydimenziósak lehetnek. Ha $u^2 + v^2 \neq 0$, akkor $1 = (u + vx)\frac{1}{u^2+v^2}(u - vx)$ benne van az $u + vx$ által generált ideálban, és akkor az csak a teljes faktorgyűrű lehet. Ha $u^2 + v^2 = (u + vi)(u - vi) = 0$, akkor $u = \pm vi \Rightarrow u + vx = v(x \pm i)$, tehát minden valódi ideál tartalmazza $x + i$ és $x - i$ valamelyikét. Ezek közül bármelyiknek a skalárszorosai egydimenziós, és így maximális ideált alkotnak ($(x + i)(u + vx) = (u + vi)x + (ui - v) = (u + vi)(x + i)$ és hasonlóan $(x - i)(u + vx) = (u - vi)x + (-v - ui) = (u - vi)(x - i)$, tehát ezek az alterek valóban ideálok), és így a két triviális ideálon kívül csak ez a két ideálja van a faktorgyűrűnek.

**9.** *Adjuk meg a $K[x]/(x^2 + x + 1)$ faktorgyűrű elemszámát, ha $K = \mathbb{Z}_2$, illetve $\mathbb{Z}_3$. Ezek közül melyik faktorgyűrű test?*

*Megoldás:* Az ideál mellékosztályainak reprezentánsrendszerét adják a legföljebb elsőfokú polinomok, így $K = \mathbb{Z}_2$ esetén 4-elemű, $K = \mathbb{Z}_3$ esetén 9-elemű a faktorgyűrű. Az első faktorgyűrű test: itt $(1 + x)x = x + x^2 = x + x + 1 = 1$, így minden nem nulla eleme invertálható. A második viszont még csak nem is nullosztómentes: $\mathbb{Z}_3$ fölött $x^2 + x + 1 = x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$, tehát a faktorgyűrűben $(x - 1)^2 = 0$.

**Hf1.** *Bizonyítsuk be, hogy $\langle x, y \mid y^{-1}xy = x^2,\ x^{-1}yx = y^2 \rangle = 1$.* *(3 pont)*

**Hf2.** *Bizonyítsuk be, hogy kommutatív gyűrűben a nilpotens elemek ideált alkotnak! Mutassunk példát nem kommutatív gyűrűre, amelyben a nilpotensek még részgyűrűt sem alkotnak!* *(3 pont)*