

1. Legyen I ideálja egy egységelemes gyűrűnek, J ideálja I -nek, és \tilde{J} a J által generált ideál R -ben. Bizonyítsuk be, hogy $\tilde{J}^3 \subseteq J$.
2. Bizonyítsuk be, hogy a következő halmaz maximális ideál a valós felső háromszögmátrixok gyűrűjében:

$$\left\{ \left[\begin{array}{ccc} a & b & c \\ 0 & 0 & d \\ 0 & 0 & e \end{array} \right] \mid a, b, c, d, e \in \mathbb{R} \right\}.$$

3. Legyen R a H halmaz részhalmazainak gyűrűje, ahol a szorzás a halmazok metszete, az összeadás pedig a szimmetrikus differencia. Bár ez nem nullosztómentes gyűrű, itt is tudunk oszthatóságot definiálni ($a \mid b \Leftrightarrow \exists c : b = ac$), és így prím és irreducibilis elemeket is.
 - a) Mik az irreducibilis elemek,
 - b) mik a prímek R -ben?
 - c) Előáll-e minden nem nulla és nem egység elem irreducibilisek szorzataként, és egyértelmű-e ez a felbontás?
4. Bontsuk fel a $-7 + 17i$ Gauss-egészet Gauss-prímek szorzatára!
5. Legyen R egy egységelemes kommutatív gyűrű, P prímeálja R -nek, és $a \in R$. Bizonyítsuk be, hogy az $S := \{x \in R \mid xa \in P\}$ halmaz prímeálja R -nek!
6. Bizonyítsuk be, hogy az $\mathbb{R}[x, y]$ polinomgyűrűnek az $x - y$ elem által generált ideállal vett faktorgyűrűje főideálgyűrű.

1. Legyen I ideálja egy egységelemes gyűrűnek, J ideálja I -nek, és \tilde{J} a J által generált ideál R -ben. Bizonyítsuk be, hogy $\tilde{J}^3 \subseteq J$.
2. Bizonyítsuk be, hogy a következő halmaz maximális ideál a valós felső háromszögmátrixok gyűrűjében:

$$\left\{ \left[\begin{array}{ccc} a & b & c \\ 0 & 0 & d \\ 0 & 0 & e \end{array} \right] \mid a, b, c, d, e \in \mathbb{R} \right\}.$$

3. Legyen R a H halmaz részhalmazainak gyűrűje, ahol a szorzás a halmazok metszete, az összeadás pedig a szimmetrikus differencia. Bár ez nem nullosztómentes gyűrű, itt is tudunk oszthatóságot definiálni ($a \mid b \Leftrightarrow \exists c : b = ac$), és így prím és irreducibilis elemeket is.
 - a) Mik az irreducibilis elemek,
 - b) mik a prímek R -ben?
 - c) Előáll-e minden nem nulla és nem egység elem irreducibilisek szorzataként, és egyértelmű-e ez a felbontás?
4. Bontsuk fel a $-7 + 17i$ Gauss-egészet Gauss-prímek szorzatára!
5. Legyen R egy egységelemes kommutatív gyűrű, P prímeálja R -nek, és $a \in R$. Bizonyítsuk be, hogy az $S := \{x \in R \mid xa \in P\}$ halmaz prímeálja R -nek!
6. Bizonyítsuk be, hogy az $\mathbb{R}[x, y]$ polinomgyűrűnek az $x - y$ elem által generált ideállal vett faktorgyűrűje főideálgyűrű.