

1. Legyen α az $x^2 - x + 1 \in \mathbb{Q}[x]$ polinom egyik gyöke.
 - a) Hány dimenziós $\mathbb{Q}(\alpha)$ mint \mathbb{Q} fölötti vektortér?
 - b) Bizonyítsuk be, hogy α^7 és α lineárisan összefüggnek ebben a vektortérben.
 2. Bizonyítsuk be, hogy $\mathbb{Q}[x]/(x^2 - 2) \cong \mathbb{Q}[x]/(x^2 - 2x - 1)$.
 3. Hányadfokú a $\mathbb{Q}(i\sqrt{3})$, illetve a $\mathbb{Q}(i + \sqrt{3})$ bővítés \mathbb{Q} fölött?
 4. Adjuk meg $\cos 20^\circ$ minimálpolinomját \mathbb{Q} fölött.
 5. Számítsuk ki a következő testbővítések fokait \mathbb{Q} fölött!
 - a) $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$
 - b) $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$
 - c) $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4})$
 - d) $\mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3})$
 - e) $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2} + \sqrt{2})$
 6. Legyen α az $x^3 - 2x^2 + x + 1$ polinom egyik gyöke. Adjuk meg $\alpha - 1$ reciprokát α legfölbjebb másodfokú polinomjaként!
 7. Hányadfokú az F/K bővítés, ha F az f felbontási teste, és
 - a) $K = \mathbb{Q}, f = x^6 - 1$
 - b) $K = \mathbb{Q}, f = x^6 - 2$
 - c) $K = \mathbb{F}_7, f = x^6 - 1$
 - d) $K = \mathbb{F}_5, f = x^6 - 2$
 8. Legyen $f(x) = x^4 + x + 1 \in \mathbb{F}_2[x]$. Irreducibilis-e ez a polinom? Ha $f(\theta) = 0$, ahol θ az f felbontási testének eleme, akkor mennyi lehet θ rendje a test multiplikatív csoportjában?
 9. Legyen α az $x^3 + x + 1$ polinom egyik gyöke \mathbb{F}_2 fölött, és legyen $K = \mathbb{F}_2(\alpha)$. Irreducibilis-e az $x^2 + x + \alpha$ polinom K fölött?
 10. Lássuk be, hogy ha $L|K$ algebrai testbővítés, és az R gyűrűre $K \leq R \leq L$, akkor R test!
 11. Legyen K tetszőleges test, $K(t)$ pedig K -nak egy egyszerű transzcendens bővítése. Legyen $K < M \leq K(t)$. Bizonyítsuk be, hogy $K(t)$ algebrai bővítése M -nek!
- Hf1.** Határozzuk meg a $\mathbb{Q}(\sqrt{3 - \sqrt{2}})$ testbővítés fokát \mathbb{Q} fölött!
- Hf2.** Legyen α az $x^2 + x - 1$ polinom egyik gyöke \mathbb{F}_3 fölött, és $K = \mathbb{F}_3(\alpha)$. Határozzuk meg az $x^2 + 1$ polinom összes gyökét K -ban mint az α lineáris polinomját!
- Hf3.** Tegyük fel, hogy $\alpha, \beta \in L$ elemekre $\alpha + \beta$ algebrai, $\alpha\beta$ pedig transzcendens a K résztest fölött. Hány lehet algebrai az α, β és $\alpha^2 + \alpha$ közül?