1. Mutassuk meg, hogy minden másodfokú bővítés normális.

2. Lássuk be, hogy egy K véges test n-edfokú bővítésében minden n-edfokú, $K[x]$-beli irreducibilis polinom lineáris faktorokra bomlik!

3. Mutassuk meg, hogy ha p prím, akkor $x^{p^n} - x$ az összes olyan $\mathbb{F}_p$ fölötti normált irreducibilis polinom szorzata, amelynek foka n-nek osztója.

4. Az előző feladat alapján számítsuk ki, hány 1 főegyütthatós másod-, harmad- és negyedfokú irreducibilis polinom van $\mathbb{F}_3$ fölött!

5. Bizonyítsuk be, hogy minden p prímre és minden n pozitív egész számra létezik n-edfokú irreducibilis polinom $\mathbb{F}_p$ fölött.

6. Igaz-e, hogy egy $K = \mathbb{F}_p(\alpha)$ $(\alpha \notin \mathbb{F}_p)$ testben α szükségképpen generátoreleme a K multiplikatív csoportjának?

7. Igaz-e, hogy normális bővítés normális bővítése normális az eredeti test fölött?

8. Van-e többszörös gyöke az $f(x) = x^4 + 2x^3 - x^2 - 2x + 1 \in \mathbb{Q}[x]$ polinomnak a felbontási testében? Ha igen, bontsuk föl olyan $\mathbb{Q}[x]$-beli polinomok szorzatára, amelyeknek nincs többszörös gyökük!

9. Milyen karakterisztikájú test fölött lehet az $f(x) = 3x^7 + 7x^2 + 2$ polinomnak többszörös gyöke? Bontsuk föl ott $f(x)$-et irreducibilis faktorokra.

10. Bizonyítsuk be, hogy ha $\operatorname{char} K = p$, és $f(x) = g(x^p) \in K[x]$ irreducibilis, akkor f nem szeparábilis, sőt valamely $k \in \mathbb{N}$-re f-nek a felbontási testében minden gyöke pontosan p^k-szoros.

11. Legyen $\operatorname{char} K = p$, és $K(t)$ a K test egyszerű transzcendens bővítése. Bizonyítsuk be, hogy $K(t)$-ben az $x^p - t$ polinom irreducibilis és nem szeparábilis.

Hf1. Hányadfokú $x^4 + 3$ felbontási teste $\mathbb{Q}$ és $\mathbb{F}_7$ fölött?

Hf2. Bizonyítsuk be, hogy $\mathbb{Q}(\cos 40°)$ normális bővítése $\mathbb{Q}$-nak!