1. Legyen α az x^3-2 polinom egyik nem valós gyöke. Határozzuk meg α fokát $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ fölött, és határozzuk meg a $\mathbb{Q}(\alpha)\cap\mathbb{R}$ résztestet! Igaz-e, hogy ha $K\le L\le M$, és $\alpha\in M$, akkor α L fölötti foka osztója α K fölötti fokának?

2. Legyen $L|K$ egy testbővítés, M és N pedig olyan közbülső testek, amelyekre az $M|K$ és $N|K$ bővítések normálisak. Legyen S az L-nek az M és N által generált résztteste és $T=M\cap N$. Bizonyítsuk be, hogy az $S|K$ és $T|K$ bővítések mindegyike normális.

3. Bizonyítsuk be, hogy tökéletes test minden véges bővítése is tökéletes.

4. Adjuk meg a következő bővítéseket egyszerű bővítésként:
a) x^4-2 felbontási teste $\mathbb{Q}$ fölött;
b) $\mathbb{F}_2(\alpha,\beta)$, ahol α az x^2+x+1, β az x^3+x+1 polinom egy-egy gyöke.

5. Hányadfokú az x^6+3 polinom felbontási teste $\mathbb{Q}$ fölött?

6. a) Bizonyítsuk be, hogy $\mathbb{R}$ automorfizmuscsoportja egyelemű. (Útmutatás: Lássuk be, hogy $\mathbb{R}$ minden automorfizmusa rendezéstartó.)
b) Hány automorfizmusa van $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$-nek? (Miért nem mond ez ellent a Galois-elmélet főtételének?)
c) Mutassunk példát olyan véges normális (de nem szeparábilis!) bővítésre, melynél a relatív automorfizmusok csoportja 1-elemű.

7. Bizonyítsuk be, hogy $\mathbb{R}$ nem áll elő egy valódi résztestének véges fokú normális bővítéseként.

8. Határozzuk meg a $\mathbb{Q}(\sqrt{2}+\sqrt{3})\mid\mathbb{Q}$ bővítés Galois-csoportját.

9. Határozzuk meg a következő polinomok Galois-csoportját $\mathbb{Q}$ fölött és $\mathbb{F}_3$ fölött
a) x^4-3x^2+4 b) x^3-2 c) x^3+2x^2+2

10. Bizonyítsuk be, hogy ha egy harmadfokú, racionális együtthatós, irreducibilis polinomnak nem mindegyik gyöke valós, akkor a Galois-csoportja S_3-mal izomorf.

Hf1. Bizonyítsuk be, hogy egy nem 2 karakterisztikájú K test minden másodfokú bővítése megkapható $K(\sqrt{d})$ alakban, valamely $d\in K$-val!

Hf2. Ha egy testnek van egy 8 elemű és egy 16 elemű részteste, akkor hány elemű ezeknek a metszete, illetve az általuk generált résztest?

Hf3. Tegyük fel, hogy egy α algebrai szám minimálpolinomja $\mathbb{Q}$ fölött x^3-2x+2. Hányadfokú $\mathbb{Q}$-nak az α^2-tel való bővítése? Adjuk meg α^2 minimálpolinomját $\mathbb{Q}$ fölött!