

1. Megszerkeszthető-e egy egyenlőszárú háromszög, ha adott a szára és a beírt kör sugara?
  2. Tudjuk, hogy  $\mathbb{Q}(\cos 40^\circ)$  Galois-csoportja 3-elemű. Van-e olyan racionális szám, amelynek a köbgyökével való bővítés ugyanezt a testet adja?
  3. Bizonyítsuk be, hogy ha egy  $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$  irreducibilis polinom Galois-csoportja kommutatív, akkor a Galois-csoport rendje  $\deg f$ .
  4. Az alábbiak közül melyik polinomok gyökeit lehet az alpműveletek és gyökvonás segítségével felírni?
    - a)  $x^4 + 2x^3 - 5x + 1$
    - b)  $x^5 - 15x^4 + 6$
    - c)  $x^6 - 2x^2 + 4$
  5. Legyen  $L|K$  egy Galois-bővítés,  $M$  és  $N$  pedig olyan közbülső testek, amelyekre az  $M|K$  és  $N|K$  bővítések normálisak, továbbá legyen  $S$  az  $L$ -nek az  $M$  és  $N$  által generált részteste. Bizonyítsuk be, hogy ha  $\text{Gal}(M|K)$  és  $\text{Gal}(N|K)$  feloldható, akkor  $\text{Gal}(S|K)$  is feloldható.
  6. Legyen  $H$  egy nem üres részhalmaza az  $R$  gyűrűnek. Lássuk be, hogy a  $H$  által generált jobbideál  $\{\sum n_i h_i + h_i r_i \mid n_i \in \mathbb{Z}, h_i \in H, r_i \in R\}$ . Írjuk föl hasonló módon a  $H$  által generált ideál elemeit is!
  7. Bizonyítsuk be, hogy az  $R$  egységelemes gyűrű  $a$  eleme által generált jobbideál az  $aR$  komplexusszorzat. Miért nem igaz, hogy egy tetszőleges  $H$  részhalmaz által generált jobbideál a  $HR$  komplexusszorzat?
  8. Adjuk meg a  $K[x, y]$  gyűrű (ahol  $K$  kommutatív test)  $x$  és  $y^2$  által generált ideáljának elemeit. Adjuk meg a faktorgyűrűt az ideál mellékosztályainak egy alkalmas reprezentánsrendszerével. Mik az ideáljai a faktorgyűrűnek?
  9. Bizonyítsuk be, hogy ha egy gyűrűnek minden eleme idempotens, akkor a gyűrű kommutatív. Hány eleme lehet egy ilyen tulajdonságú véges gyűrűnek? Adjunk meg ilyen végtelen gyűrűt is!
  10. Legyen  $K$  test. Bizonyítsuk be, hogy a  $K$  fölötti  $n \times n$ -es felső háromszögmátrixok gyűrűjében ideált alkotnak azok, amelyeknek átlójában csupa 0 áll. Mi az ehhez az ideálhoz tartozó faktorgyűrű? Keressük meg  $n = 3$ -ra az összes ideált.
- Hf1.** Adjuk meg az  $x^3 - 2$  polinom  $\mathbb{Q}$  fölötti felbontási testének összes résztestét!
- Hf2.** Határozzuk meg az  $\text{Gal}(L|K)$  Galois-csoportot, ahol  $K = \mathbb{Q}(i\sqrt{3})$  és  $L = K(\sqrt[6]{7})$ .