1. Bizonyítsuk be, hogy ha $R = 2\mathbb{Z}$, és $R_1 = \{(a, m) \mid a \in R,\ m \in \mathbb{Z}\}$ az R egységelemes gyűrűvé való szokásos kiterjesztése, akkor R nem izomorf $\mathbb{Z}$-vel.

2. Mi a páros egészek gyűrűjének, $2\mathbb{Z}$-nek a hányadosteste?

3. Bizonyítsuk be, hogy minden véges integritási tartomány test.

4. Határozzuk meg az alábbi integritási tartományok hányadostestét, maximális ideáljait, és azokat a homomorf képeit, amelyek testek!

a) $\mathbb{Z}$ b) $K[x]$, ahol K test c) $\mathbb{Z}[x]$ d) $\mathbb{Z}[i]$

5. Mik az irreducibilis és a prím elemek a páros egészek gyűrűjében, $2\mathbb{Z}$-ben? Határozzuk meg $2\mathbb{Z}$ ideáljait és főideáljait.

6. Mutassuk meg:

a) $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ elemei (ahol $d \in \mathbb{Z}$ nem négyzetszám) egyértelműen írhatók $a + b\sqrt{d}$ alakban, ahol $a, b \in \mathbb{Z}$;
b) az $N(a + b\sqrt{d}) = a^2 - b^2 d$ norma multiplikatív;
c) $z, u \in \mathbb{Z}[\sqrt{d}]$-re $z \mid u \Rightarrow N(z) \mid N(u)$;
d) $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$-ben z egység $\Leftrightarrow N(z) = \pm 1$.

7. Bontsuk fel prímek szorzatára a 7, 13 és $5 + i$ számokat $\mathbb{Z}[i]$-ben! Hány egymással nem asszociált prím faktora van $2 + 2i$-nek?

8. Legyen $R = \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$. Adjuk meg 6-nak két (lényegesen) különböző, irreducibilis elemekre való felbontását R-ben.

9. Lássuk be, hogy ha $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ alaptételes (ahol d nem négyzetszám), akkor 2 nem irreducibilis $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$-ben.

10. Tegyük föl, hogy $d \in \mathbb{Z}$ négyzetmentes. Lássuk be, hogy

a) $d < 0$ esetén $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ alaptételes $\Leftrightarrow d = -1$ vagy -2.
b) $d \equiv 1 \ (\pmod 4)) \Rightarrow \mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ nem alaptételes.

Hf1. Gyökjelekkel felírhatók-e, illetve a komplex számsíkon (a tengelyek és az 1-hez tartozó pont ismeretében) megszerkeszthetők-e az $f(x) = x^6 - 4x^4 + 6x^2 + 2$ polinom gyökei?

Hf2. Legyen R egységelemes kommutatív gyűrű. Bizonyítsuk be, hogy ha $I, J \triangleleft R$, és $I + J = R$, akkor $IJ = I \cap J$.

Hf3. Legyen $R = \mathbb{Z}[x]$, és I a 2 és x^2 által generált ideál R-ben. Bizonyítsuk be, hogy az R/I faktorgyűrű 4 elemű, és lássuk be, hogy R/I multiplikatív félcsoportja izomorf $\mathbb{Z}_4$ multiplikatív félcsoportjával.