1. Az R egységelemes kommutatív gyűrűben definiáljuk az ideálok közötti oszthatóságot az $A \mid B \Leftrightarrow B \subseteq A$ feltétellel. Mi a legnagyobb közös osztó, a legkisebb közös többszörös, irreducibilis elem, egység, relatív prím elempár erre az oszthatóságra nézve? Mutassuk meg, hogy Dedekind-gyűrűben ez az oszthatóság ekvivalens azzal, hogy $B = AC$ valamilyen C ideálra.

2. Legyen R Dedekind-gyűrű, $A, B, C \lhd R$. Bizonyítsuk be, hogy

a) ha $C \neq (0)$, akkor $AC \subseteq BC \Leftrightarrow A \subseteq B$;
b) $A \cap (B + C) = A \cap B + A \cap C$;
c) $A \cap B + C = (A + C) \cap (B + C)$.

3. Legyen $R = \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$.

a) Adjuk meg 6-nak két (lényegesen) különböző, irreducibilis elemekre való felbontását R-ben.
b) Adjuk meg a (6) ideálnak a prímideálokra való felbontását R-ben.

4. Legyen R Dedekind-gyűrű, $A, B \lhd R$. Bizonyítsuk be, hogy ha A és B relatív prímek, és $c, d \in R$, akkor van olyan $x \in R$, amire $x \equiv c\ ((\text{mod A}))$ és $x \equiv d\ ((\text{mod B}))$. Mondjuk ki, és lássuk be az állítás megfelelőjét $A_1, A_2, \ldots, A_n$ páronként relatív prím ideálokra (Kínai maradéktétel).

5. Legyen R Dedekind-gyűrű, $A, B \lhd R$, $(0) \neq B \subseteq A$, és $A = P_1^{n_1} \cdots P_k^{n_k}$, $B = P_1^{m_1} \cdots P_k^{m_k}$ az A és B prímtényezős felbontása. Mutassuk meg, hogy van olyan a eleme A-nak, amelyre $a \notin P_i^{n_i+1}$ minden i-re, és hogy ezzel az a elemmel $A = B + (a)$.

6. Bizonyítsuk be, hogy Dedekind-gyűrűben minden ideál generálható legfeljebb két elemmel.

7. Legyen $R = K^{n \times n}$ egy K (ferde)test fölötti mátrixgyűrű. Csupán R gyűrűműveleteinek ismeretében hogyan határozhatjuk meg n-et és K-t, ha

a) K (kommutatív) test;
b) K ferdetest?

Hf1. Bizonyítsuk be, hogy két prímideál metszete csak akkor prímideál, ha a két ideál közül valamelyik tartalmazza a másikat.

Hf2. Legyen R kommutatív Noether-gyűrű, és tegyük fel, hogy $I \lhd R$ nilideál, azaz minden $x \in I$-re van olyan n, hogy $x^n = 0$. Bizonyítsuk be, hogy ekkor I nilpotens, vagyis van olyan m, hogy $I^m = 0$.