1. Tegyük fel, hogy az R véges gyűrű minden x elemére van olyan $n > 1$, hogy $x^n = x$. Bizonyítsuk be, hogy R kommutatív! (Útmutatás: Használjuk a Wedderburn–Artin-tételt!)

2. Legyen M baloldali R-modulus, B balideálja, J jobbideálja R-nek, $a \in M$ és U, V részmodulusok M-ben. Az alábbiak közül melyikek lesznek feltétlenül részmodulusai M-nek? (Az összegek komplexusösszegeket, a szorzatok a komplexusszorzat elemeiből alkotott összegek hamazát jelentik.)

a) Ra b) Ba c) Ja d) $U \cap V$ e) $U \cup V$
f) $U + V$ g) $\mathrm{Ann}_M(B)$ h) $\mathrm{Ann}_M(J)$ i) BU j) JU.

3. Azt mondjuk, hogy egy M bal oldali R-modulus *ciklikus*, ha $M = Rm$ valamely $m \in M$-re. Bizonyítsuk be, hogy minden ciklikus R-modulus izomorf az R-nek mint önmaga fölötti balmodulusnak egy faktormodulusával.

4. Bizonyítsuk be, hogy egy R gyűrű minden nilpotens balideálja annullál minden egyszerű R-modulust.

5. Mi lehet a $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_3$, illetve $\mathbb{Z}_6$ gyűrűk fölötti modulusok additív csoportja?

6. Adjunk meg olyan Abel-csoportot, amely nem maximumfeltételes, és olyat, amelyik nem minimumfeltételes.

Egy R-modulust féligegyszerűnek hívunk, ha felírható egyszerű modulusok direkt összegeként.

7. Bizonyítsuk be, hogy minden M modulusra ekvivalens a következő három állítás:
(i) M féligegyszerű (azaz M egyszerű modulusok direkt összege);
(ii) M egyszerű modulusok összege;
(iii) minden $U \leq M$-hez van $V \leq M$, hogy $M = U \oplus V$.

8. Bizonyítsuk be, hogy féligegyszerű modulus részmodulusa és faktormodulusa is féligegyszerű!

9. Melyek egyszerűek, melyek féligegyszerűek a véges Abel-csoportok közül? Milyen n-re féligegyszerű a $\mathbb{Z}_n$ Abel-csoport?

Hf1. Legyen

$$M = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & -a \end{bmatrix} \;\middle|\; a, b \in \mathbb{R} \right\} \quad \text{és} \quad R = \left\{ \begin{bmatrix} c & d \\ 0 & c \end{bmatrix} \;\middle|\; c, d \in \mathbb{R} \right\}.$$

Bizonyítsuk be, hogy M jobbmodulus R fölött (a természetes mátrixszorzással), és hogy M-nek egyetlen valódi részmodulusa van.

Hf2. Bizonyítsuk be, hogy ha S, T, U részmodulusai az M modulusnak, akkor

$$S \cap (T + U) = (S \cap T) + U \Leftrightarrow S \supseteq U$$