1. *a) Bizonyítsuk be, hogy egy Noether-gyűrű minden faktorgyűrűje is Noether.*
b) Bizonyítsuk be, hogy ha $I \lhd R$, és I és R/I is Noether, akkor R is Noether.

Megoldás: a) Vegyünk a faktorgyűrűben egy növekvő jobbideálláncot. Ennek ősképe az eredeti gyűrűben szintén növekvő jobbideállánc, amely a Noether feltétel miatt valahol leáll, és akkor a faktorbeli lánc is leáll.

b) Legyen $J_1 \subseteq J_2 \subseteq \cdots$ jobbideállánc R-ben. Ekkor $J_1 \cap I \subseteq J_2 \cap I \subseteq \cdots$ is jobbideállánc I-ben, és $(J_1 + I)/I \subseteq (J_2 + I)/I \subseteq \cdots$ is jobbideállánc R/I-ben. Mivel I és R/I (jobb) Noether, van olyan n_0, hogy $n \geq n_0$ esetén $J_n \cap I = J_{n+1} \cap I$ és $J_n + I = J_{n+1} + I$. Belátjuk, hogy ekkor $J_{n+1} \subseteq J_n$ (amiből $J_{n+1} = J_n$). Ha $j_{n+1} \in J_{n+1}$, akkor $J_n + I = J_{n+1} + I$ miatt van olyan $j_n \in J_n$ és $i \in I$, hogy $j_{n+1} = j_n + i$, így $i = j_{n+1} - j_n \in J_{n+1} \cap I = J_n \cap I$, amiből $j_{n+1} - j_n \in J_n$, és így $j_{n+1} \in J_n$.

2. *Bizonyítsuk be, hogy ha $R[x]$ Noether-gyűrű valamely R kommutatív gyűrűre, akkor R szükségképpen egységelemes.*

Megoldás: Egy $r \in R$ elemre az $(r) \subseteq (r, rx) \subseteq (r, rx, rx^2) \subseteq \cdots$ ideálsorozat valahol leáll: $rx^{n+1} \in (r, rx, \ldots, rx^n)$, azaz $rx^{n+1} = \sum_{i=0}^{n} n_i r x^i + \sum_{i=0}^{n} p_i(x) r x^i$ valamely $n_i \in \mathbb{Z}$ és $p_i(x) \in R[x]$-re. Ebben az x^{n+1} együtthatója $r = re$ valamely $e \in R$-re.

Mivel $R[x]$ Noether-gyűrű, végesen generált: $R[x] = (p_1(x), \ldots, p_k(x))$. Ha $p_i(x)$ konstans tagja r_i, akkor ebből $R = (r_1, \ldots, r_k)$. Mindegyik r_i-hez van olyan e_i, hogy $r_i = r_i e_i$. Ebből belátható, hogy van hozzájuk közös e is: ugyanis ha $r = re$ és $s = sf$, akkor $r = r(e + f - ef)$ és $s = s(e + f - ef)$, tehát $e + f - ef$ mindkettőhöz jó. Ezt végigcsinálva az $r_1, r_2, \ldots, r_k$ elemekre kapunk egy $e \in R$ elemet, amelyre $r_i = r_i e$ minden $i = 1, \ldots, k$-ra. Végül a kommutativitás miatt $(r_1, \ldots, r_k)$ minden r elemére igaz, hogy $r = re$, vagyis e egységeleme R-nek.

3. *Mutassuk meg, hogy ha egy R kommutatív nullosztómentes gyűrű minimumfeltételes, akkor R test.*

Megoldás: Először belátjuk, hogy R-nek van egységeleme. Tetszőleges $0 \neq a \in R$-re az $(a) \supseteq (a^2) \supseteq (a^3) \supseteq \cdots$ ideálsorozat valahol leáll, így van olyan n, hogy $a^n \in (a^{n+1})$, azaz $a^n = ka^{n+1} + ra^{n+1}$ valamely $k \in \mathbb{Z}$-re és $r \in R$-re. A nullosztómentesség miatt ebből $a = a(ka + ra)$, vagyis van olyan $e \in R$, amelyre $a = ae$. De akkor minden $b \in R$-re $ab = aeb$, és a nullosztómentesség miatt $b = eb$ minden b-re. Minthogy R kommutatív, ebből következik, hogy e egységelem R-ben. Használjuk e-re a megszokott 1 jelöléstl

Visszatérve arra, hogy $a^n \in (a^{n+1})$, az R egységelemessége miatt azt kapjuk, hogy $a^n \in a^{n+1}R$, azaz van olyan $r \in R$, amelyre $a^n = a^{n+1}r$, és a^n-nel egyszerűsítve, $1 = ar$, vagyis a-nak van inverze. Ezzel beláttuk, hogy R test.

4. *Bizonyítsuk be, hogy a 2 és x által generált ideál nem főideál $\mathbb{Z}[x]$-ben.*

Megoldás: $(2, x) = \{ \sum a_i x^i \mid 2 \mid a_0 \}$, mert az ilyen alakú polinomok biztosan benne vannak $(2, x)$-ben, és ezek ideált is alkotnak.

Ha $(2, x)$ főideál lenne, akkor volna olyan $p(x)$ polinom, amelynek 2 és x is többszöröse. Abból, hogy 2 a $p(x)$ többszöröse, következik, hogy $p(x) = c \neq 0$ konstans, viszont akkor $(p(x)$ minden elemének minden együtthatója osztható c-vel, tehát $x \in (p(x))$ esetén c osztója 1-nek, és akkor $(2, x) = (p(x)) = R$, ellentmondva a $(2, x)$ ideál fönti leírásának.

5. *Számítsuk ki a $(4,x)$ és $(6,x)$ ideálok szorzatát és metszetét $\mathbb{Z}[x]$-ben!*

Megoldás: $(4,x) = \{\sum a_i x^i \mid 4 \mid a_0\}$ és $(6,x) = \{\sum a_i x^i \mid 6 \mid a_0\}$, tehát $(4,x)\cap(6,x) = \{\sum a_i x^i \mid 12 \mid a_0\} = (12,x)$. Másrészt $(4,x)\cdot(6,x) = (24,4x,6x,x^2) = (24,2x,x^2) = \{\sum a_i x^i \mid 24 \mid a_0,\ 2 \mid a_1\}$.

6. *Keressünk $\mathbb{Z}$-ben olyan A és B ideálokat, amelyekre $AB \neq A\cap B$.*

Megoldás: $A = (4)$, $B = (6)$-ra $AB = (24)$, és $A\cap B = (12)$.

7. *Bizonyítsuk be, hogy (x) prímideál $\mathbb{Z}[x]$-ben, de nem maximális!*

Megoldás: A 4. feladat megoldásában láttuk, hogy $(x) \subset (x,2) \subset \mathbb{Z}[x]$, tehát (x) nem maximális. Viszont ha $f(x)g(x) \in (x)$, azaz $f(x)g(x)$ konstans tagja 0, akkor $f(x)$ vagy $g(x)$ konstans tagja 0, és így $f(x) \in (x)$ vagy $g(x) \in (x)$. Tehát (x) prímideál.

8. *Legyen R kommutatív, I valódi ideál R-ben, és I prímideál. Bizonyítsuk be, hogy ha R/I véges, akkor I maximális.*

Megoldás: R/I véges, nullosztómentes gyűrű, tehát a 6. feladatsor 3. feladata szerint R/I test, azaz I maximális.

9. *Keressük meg a főideálokat és a prímideálokat a 2×2-es felső háromszögmátrixok gyűrűjében!*

Megoldás: Az 5./10. feladat megoldásához hasonlóan az ideálok: $\begin{bmatrix} * & * \\ 0 & * \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} * & * \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & * \\ 0 & * \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & * \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ és $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Ezek közül az első a teljes gyűrű, a második és harmadik pedig maximális. A maradék kettő viszont nem is prímideál, mert $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ benne van mindkettőben.

10. *a) Bizonyítsuk be, hogy ha egy R kommutatív gyűrű nem főideálgyűrű, és $I \lhd R$ nem főideál, akkor létezik egy $J \lhd R$, amely tartalmazza I-t, nem főideál, és amely maximális erre a tulajdonságra nézve.*

b) Bizonyítsuk be, hogy ha egy R egységelemes kommutatív gyűrűben minden prímideál főideál, akkor R főideálgyűrű.

Megoldás: a) A nem főideálokra alkalmazható a Zorn-lemma, ugyanis ha I nem főideálok egy növő láncának uniója, akkor I sem lehet főideál, mert ha egy elem generálná, az már valamelyik kisebb ideálban is benne lenne, és így szükségképpen az egészet kigenerálná.

b) Tegyük fel, hogy R nem főideálgyűrű. Ekkor van benne olyan ideál, amelyik nem főideál, és így az a) rész szerint van ezek között maximális is, legyen ez I. Belátjuk, hogy I főideál. Ugyanis ha $a,b \in R\setminus I$, de $ab \in I$, akkor I maximális tulajdonsága miatt $I+(a)$ és $I+(b)$ főideálok: $I+(a) = (c)$ és $I+(b) = (d)$. De akkor $(cd) = (I+(a))(I+(b)) = I + (a)I + (b)I + (ab) = I$, ellentmondva annak, hogy I nem főideál. Viszont a feltétel szerint minden prímideálnak főideálnak kell lennie, tehát így is ellentmondásra jutunk.