1. *Tegyük fel, hogy az R véges gyűrű minden x elemére van olyan $n > 1$, hogy $x^n = x$. Bizonyítsuk be, hogy R kommutatív! (Útmutatás: Használjuk a Wedderburn–Artin-tételt!)*

Megoldás: A gyűrűben nincs nem 0 nilpotens elem, mert ha $x^m = 0$ valamely $m > 1$-re, másrészt a feltevés szerint $x^n = x$ valamely $n > 1$-re, akkor $x = x^{m(n-1)+1} = 0$. Továbbá az R végessége miatt R Artin-gyűrű, tehát a Wedderburn–Artin-tétel szerint R ferdetest fölötti mátrixgyűrűk direkt összege. Ha $m > 1$, akkor egy $m \times m$-es mátrixgyűrűben vannak nilpotens elemek ($E_{1m}^2 = 0$), tehát R 1×1-es mátrixgyűrűk, azaz ferdetestek direkt összege. De a Wedderburn-tétel miatt ezek a véges ferdetestek mind testek, tehát R testek direkt összege, és így kommutatív.

2. *Legyen M baloldali R-modulus, B balideálja, J jobbideálja R-nek, $a \in M$ és U, V részmodulusok M-ben. Az alábbiak közül melyikek lesznek feltétlenül részmodulusai M-nek? (Az összegek komplexusösszegeket, a szorzatok a komplexusszorzat elemeiből alkotott összegek hamazát jelentik.)*

a) Ra *b)* Ba *c)* Ja *d)* $U \cap V$ *e)* $U \cup V$
f) $U + V$ *g)* $\mathrm{Ann}_M(B)$ *h)* $\mathrm{Ann}_M(J)$ *i)* BU *j)* JU.

Megoldás: Ba, és speciálisan Ra balmodulus, Ja nem. $U \cap V$ és $U + V$ balmodulus, $U \cap V$ nem (még egy vektortér két különböző 1-dimenziós alterének az uniója sem altér). $\mathrm{Ann}_M(B) = \{\, m \in M \mid Bm = 0 \,\}$ nem részmodulus (a gyűrűelemmel való szorzásra nem zárt), de $\mathrm{Ann}_M(J) = \{\, m \in M \mid Jm = 0 \,\}$ igen. BU és JU közül BU részmodulus, JU nem.

3. *Azt mondjuk, hogy egy M bal oldali R-modulus ciklikus, ha $M = Rm$ valamely $m \in M$-re. Bizonyítsuk be, hogy minden ciklikus R-modulus izomorf az R-nek mint önmaga fölötti balmodulusnak egy faktormodulusával.*

Megoldás: Legyen $\varphi : {}_RR \to Rm$, $r \mapsto rm$. Ez modulushomomorfizmus: $(r - r')\varphi = (r - r')m = rm - r'm = r\varphi - r'\varphi$, és $s \in R$-re $(sr)\varphi = (sr)m = s(rm) = s(r\varphi)$. Mivel φ szürjektív, $M = Rm = \mathrm{Im}\,\varphi \cong {}_RR/\,\mathrm{Ker}\,\varphi$.

4. *Bizonyítsuk be, hogy egy R gyűrű minden nilpotens balideálja annullál minden egyszerű R-modulust.*

Megoldás: Legyen B balideál R-ben, és tegyük fel, hogy $B^k = 0$ valamely k-ra. Ha M egyszerű modulus, azaz nincs valódi részmodulusa, akkor $BM \le M$ miatt $BM = 0$ vagy $BM = M$. Az első esetben kész vagyunk, a másodikban $M = BM = BBM = \ldots = B^kM = 0M = 0$, tehát ekkor is igaz, hogy $BM = 0$.

5. *Mi lehet a $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_3$, illetve $\mathbb{Z}_6$ gyűrűk fölötti modulusok additív csoportja?*

Megoldás: Az összes Abel-csoport egyúttal $\mathbb{Z}$-modulus. $\mathbb{Z}_3$ test, így a modulusai vektorterek. Mivel minden vektortér 1-dimenziós alterek direkt összege, igy a $\mathbb{Z}_3$-modulusok additív csoportja háromelemű ciklikus csoportok direkt összege. Végül ha M modulus $\mathbb{Z}_6$ fölött, akkor M additív csoportjának minden eleme első-, másod-, harmad- vagy hatodrendű. A másodrendűek a 0-val, illetve a harmadrendűek a 0-val részcsoportot alkotnak: M_2 és M_3, amelyekre $M_2 \cap M_3 = 0$. Továbbá minden $m \in M$ egy M_2-beli és egy M_3-beli elem összege: $m = 7m = (3m) + (4m)$, így $M = M_2 \oplus M_3$, ahol az elsőző eset szerint M_2 másodrendű ciklikus csoportok, M_3 pedig harmadrendű ciklikus csoportok direkt összege.

6. *Adjunk meg olyan Abel-csoportot, amely nem maximumfeltételes, és olyat, amelyik nem minimumfeltételes.*

Megoldás: $\mathbb{Z}$ nem minimumfeltételes: $\mathbb{Z} \supset 2\mathbb{Z} \supset 4\mathbb{Z} \supset 8\mathbb{Z} \supset \cdots$ részmodulusoknak szigorúan fogyó sorozata. $\mathbb{Q}$ nem maximumfeltételes: $\mathbb{Z} \subset \frac{1}{2}\mathbb{Z} \subset \frac{1}{4}\mathbb{Z} \subset \cdots$ a $\mathbb{Q}$ részmodulusainak szigorúan növő sorozata.

Egy R-modulust féligegyszerűnek hívunk, ha felírható egyszerű modulusok direkt összegeként.

7. *Bizonyítsuk be, hogy minden M modulusra ekvivalens a következő három állítás:*
(*i*) *M féligegyszerű (azaz M egyszerű modulusok direkt összege);*
(*ii*) *M egyszerű modulusok összege;*
(*iii*) *minden $U \leq M$-hez van $V \leq M$, hogy $M = U \oplus V$.*

8. *Bizonyítsuk be, hogy féligegyszerű modulus részmodulusa és faktormodulusa is féligegyszerű!*

9. *Melyek egyszerűek, melyek féligegyszerűek a véges Abel-csoportok közül? Milyen n-re féligegyszerű a $\mathbb{Z}_n$ Abel-csoport?*

Hf1. *Legyen*

$$M = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & -a \end{bmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\} \quad \text{és} \quad R = \left\{ \begin{bmatrix} c & d \\ 0 & c \end{bmatrix} \mid c, d \in \mathbb{R} \right\}.$$

Bizonyítsuk be, hogy M jobbmodulus R fölött (a természetes mátrixszorzással), és hogy M-nek egyetlen valódi részmodulusa van.

Hf2. *Bizonyítsuk be, hogy ha S, T, U részmodulusai az M modulusnak, akkor*

$$S \cap (T + U) = (S \cap T) + U \Leftrightarrow S \supseteq U$$