**1.** Oldjuk meg az $x^4 - 2x^3 + x^2 - 8x + 3 = 0$ egyenletet $\mathbb{C}$ fölött!

**2.** Legyen $\alpha$ az $x^2 - x + 1 \in \mathbb{Q}[x]$ polinom egyik gyöke.

a) Hány dimenziós $\mathbb{Q}(\alpha)$ mint $\mathbb{Q}$ fölötti vektortér?

b) Bizonyítsuk be, hogy $\alpha^7$ és $\alpha$ lineárisan összefüggnek ebben a vektortérben.

**3.** Bizonyítsuk be, hogy $\mathbb{Q}[x]/(x^2-2) \cong \mathbb{Q}[x]/(x^2-2x-1)$.

**4.** Adjuk meg $\cos 20°$ minimálpolinomját $\mathbb{Q}$ fölött.

**5.** Adjuk meg $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ minimálpolinomját $\mathbb{Q}$, illetve $\mathbb{Q}(\sqrt{6})$ fölött!

**6.** Legyen $\alpha$ az $x^3 - 2x^2 + x + 1 \in \mathbb{Q}[x]$ polinom egyik gyöke. Adjuk meg $\alpha^2 + 2$ reciprokát $\alpha$ legföljebb másodfokú polinomjaként!

**7.** Bizonyítsuk be, hogy egy $p$ karakterisztikájú testben

a) $(a+b)^{p^k} = a^{p^k} + b^{p^k}$ minden $a, b$ elemre és $k$ természetes számra;

b) $x^{p^k} - x$ gyökei résztestet alkotnak;

ha $|K| = p^n$, akkor

c) $K$ minden eleme gyöke az $x^{p^n} - x$ polinomnak;

d) $K$ minden elemének minimálpolinomja osztója $(x^{p^n} - x)$-nek.

**Hf1.** Határozzuk meg a $\mathbb{Q}(\sqrt{4-\sqrt{2}})$ minimálpolinomját $\mathbb{Q}$ fölött!

**Hf2.** Legyen $K = \mathbb{F}_2(\alpha)$ a kételemű testnek az $x^4 + x + 1 \in \mathbb{F}_2[x]$ polinom $\alpha$ gyökével való bővítése. Írjuk fel az $\frac{\alpha^2}{\alpha+1}$ elemet $\alpha$ legföljebb harmadfokú polinomjaként!