1. Hányadfokú a $\mathbb{Q}(i\sqrt{3})$, illetve az $\mathbb{Q}(i+\sqrt{3})$ bővítés $\mathbb{Q}$ fölött?

2. Számítsuk ki a következő testbővítések fokait $\mathbb{Q}$ fölött!
a) $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ b) $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ c) $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4})$ d) $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}+\sqrt{2})$

Egy $f(x) \in K[x]$ polinom felbontási teste $L \geq K$, ha L-ben f lineáris faktorokra bomlik, és ha itt f gyökei $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, akkor $L = K(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. (Ez izomorfia erejéig egyértelmű.)

3. Hányadfokú az F/K bővítés, ha F az f felbontási teste, és
a) $K = \mathbb{Q}$, $f = x^6 - 1$ b) $K = \mathbb{Q}$, $f = x^6 - 2$
c) $K = \mathbb{F}_7$, $f = x^6 - 1$ d) $K = \mathbb{F}_5$, $f = x^6 - 2$

4. Legyen α az x^3+x+1 polinom egyik gyöke $\mathbb{F}_2$ fölött, és legyen $K = \mathbb{F}_2(\alpha)$. Irreducibilis-e az $x^2 + x + \alpha$ polinom K fölött?

5. Lássuk be, hogy ha $L|K$ algebrai testbővítés, és az R gyűrűre $K \leq R \leq L$, akkor R test!

6. Legyen K tetszőleges test, $K(t)$ pedig K-nak egy egyszerű transzcendens bővítése. Legyen $K < M \leq K(t)$. Bizonyítsuk be, hogy $K(t)$ algebrai bővítése M-nek!

7. Tegyük fel, hogy $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$ olyanok, hogy $\alpha\beta\gamma$, $\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma$ és $\alpha + \beta + \gamma$ is algebrai számok $\mathbb{Q}$ fölött. Bizonyítsuk be, hogy α, β és γ is algebraiak.

8. Bizonyítsuk be, hogy ha p prím, és K egy p^n elemű test, akkor
a) K-nak minden részteste p^d elemű az n valamely d osztójára;
b) n minden d osztójára van K-nak pontosan egy p^d elemű részteste;
c) $\mathrm{Aut}(K)$ egy n elemű ciklikus csoport, amelynek generátoreleme az $x \mapsto x^p$ $(x \in K)$ automorfizmus.

9. Legyen K az $x^{p^n} - x$ felbontási teste $\mathbb{F}_p$ fölött, ahol p prím. Bizonyítsuk be, hogy
a) $|K| = p^n$;
b) K megkapható $\mathbb{F}_p$ egyszerű algebrai bővítéseként;
c) $x^{p^d} - x$ osztója $(x^{p^n} - x)$-nek az n minden d osztójára;
d) $(x^{p^n} - x)$-nek osztója minden olyan irreducibilis polinom, amelynek foka osztója n-nek;
e) minden p^n elemű test izomorf egymással.

Hf1. Legyen α az $x^2 + x - 1$ polinom egyik gyöke $\mathbb{F}_3$ fölött, és $K = \mathbb{F}_3(\alpha)$. Határozzuk meg az $x^2 + 1$ polinom összes gyökét K-ban mint az α lineáris polinomját!

Hf2. Tegyük fel, hogy $\alpha, \beta \in L$ elemekre $\alpha + \beta$ algebrai, $\alpha\beta$ pedig transzcendens a K résztest fölött. Hány lehet algebrai az α, β és $\alpha^2 + \alpha$ közül?