1. Legyen α az x^3-2 polinom egyik nem valós gyöke. Határozzuk meg α fokát $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ fölött, és határozzuk meg a $\mathbb{Q}(\alpha)\cap\mathbb{R}$ résztestet! Igaz-e, hogy ha $K \le L \le M$, és $\alpha \in M$, akkor α L fölötti foka osztója α K fölötti fokának?

2. Igaz-e, hogy normális bővítés normális bővítése normális az eredeti test fölött?

3. Legyen $L|K$ egy testbővítés, M és N pedig olyan közbülső testek, amelyekre az $M|K$ és $N|K$ bővítések normálisak. Legyen S az L-nek az M és N által generált résztteste és $T = M \cap N$. Bizonyítsuk be, hogy az $S|K$ és $T|K$ bővítések mindegyike normális.

4. Hányadfokú $x^4 - x^2 + 1$ felbontási teste $\mathbb{Q}$ fölött, illetve $\mathbb{F}_p$ fölött, ha p prím?

5. Igaz-e, hogy egy $K = \mathbb{F}_p(\alpha)$ $(\alpha \notin \mathbb{F}_p)$ testben α szükségképpen generátoreleme a K multiplikatív csoportjának?

6. Bizonyítsuk be, hogy tökéletes test minden véges bővítése is tökéletes.

7. a) Tegyük fel, hogy α és β algebrai elemek K fölött, és a minimálpolinomjuk gyökei $\alpha = \alpha_1, \ldots, \alpha_n$, illetve $\beta = \beta_1, \ldots, \beta_m$ mind különbözők. Legyen továbbá $c, d \in K \setminus \{0\}$ olyan, hogy $(i,j) \neq (1,1)$ esetén $c\alpha + d\beta \neq c\alpha_i + d\beta_j$. Lássuk be a szeparábilis bővítés egyszerűségéről szóló tétel bizonyítása alapján, hogy $K(c\alpha + d\beta) = K(\alpha, \beta)$.

b) Alkalmazzuk az a) részben bizonyított tételt $(\mathbb{Q}(\sqrt{2}+\sqrt{3}) : \mathbb{Q})$, illetve $(\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}+\sqrt{2}) : \mathbb{Q})$ kiszámítására.

8. Adjuk meg az $\mathbb{F}_2(\alpha, \beta)$ bővítést egyszerű bővítésként, ahol α az x^2+x+1, β az x^3+x+1 polinom egy-egy gyöke.

Hf1. Adjuk meg $x^4 - 2$ felbontási testét $\mathbb{Q}$ egyszerű bővítéseként!

Hf2. Bizonyítsuk be, hogy $\mathbb{Q}(\cos 40^\circ)$ normális bővítése $\mathbb{Q}$-nak!