**1.** a) Bizonyítsuk be, hogy $\mathbb{R}$ automorfizmuscsoportja egyelemű. (Útmutatás: Lássuk be, hogy $\mathbb{R}$ minden automorfizmusa rendezéstartó.)

b) Hány automorfizmusa van $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$-nek? (Miért nem mond ez ellent a Galois-elmélet főtételének?)

c) Mutassunk példát olyan véges normális (de nem szeparábilis!) bővítésre, melynél a relatív automorfizmusok csoportja 1-elemű.

**2.** Bizonyítsuk be, hogy $\mathbb{R}$ nem áll elő egy valódi résztestének véges fokú normális bővítéseként.

**3.** Határozzuk meg a $\mathbb{Q}(\sqrt{2}+\sqrt{3}) \mid \mathbb{Q}$ bővítés Galois-csoportját.

**4.** Határozzuk meg a következő polinomok Galois-csoportját $\mathbb{Q}$ fölött és $\mathbb{F}_3$ fölött

a) $x^4 - 3x^2 + 4$ b) $x^3 - 2$ c) $x^3 + 2x^2 + 2$

**5.** Bizonyítsuk be, hogy ha egy harmadfokú, racionális együtthatós, irreducibilis polinomnak nem mindegyik gyöke valós, akkor a Galois-csoportja $S_3$-mal izomorf.

**6.** Keressük meg az $f(x) = x^8 - 1$ polinom felbontási testének résztesteit!

**7.** Bizonyítsuk be, hogy az $x^5 - 4x + 2 \in \mathbb{Q}[x]$ polinom Galois-csoportja $S_5$-tel izomorf. (Útmutatás: Lássuk be, hogy a polinomnak pontosan 3 valós gyöke van, így van a Galois-csoportnak olyan eleme, ami transzpozícióként hat a polinom gyökein.)

**Hf1.** Adjuk meg az $x^3 - 2$ polinom $\mathbb{Q}$ fölötti felbontási testének összes résztestét!

**Hf2.** Ha egy testnek van egy 8 elemű és egy 16 elemű részteste, akkor hány elemű ezeknek a metszete, illetve az általuk generált résztest?