Algebra 2. **1. feladatsor** *2019. szeptember 17.*

1. Oldjuk meg az $x^4 - 2x^3 + x^2 - 8x + 3 = 0$ egyenletet $\mathbb{C}$ fölött!

2. Legyen α az $x^2 - x + 1 \in \mathbb{Q}[x]$ polinom egyik gyöke.

a) Hány dimenziós $\mathbb{Q}(\alpha)$ mint $\mathbb{Q}$ fölötti vektortér?

b) Bizonyítsuk be, hogy α^7 és α lineárisan összefüggnek ebben a vektortérben.

3. Bizonyítsuk be, hogy $\mathbb{Q}[x]/(x^2-2) \cong \mathbb{Q}[x]/(x^2-2x-1)$.

4. Adjuk meg $\cos 20°$ minimálpolinomját $\mathbb{Q}$ fölött.

5. Adjuk meg $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ minimálpolinomját $\mathbb{Q}$, illetve $\mathbb{Q}(\sqrt{6})$ fölött!

6. Legyen α az $x^3 - 2x^2 + x + 1 \in \mathbb{Q}[x]$ polinom egyik gyöke. Adjuk meg $\alpha^2 + 2$ reciprokát α legföljebb másodfokú polinomjaként!

7. Bizonyítsuk be, hogy egy p karakterisztikájú testben

a) $(a+b)^{p^k} = a^{p^k} + b^{p^k}$ minden a, b elemre és k természetes számra;

b) $x^{p^k} - x$ gyökei résztestet alkotnak;

ha $|K| = p^n$, akkor

c) K minden eleme gyöke az $x^{p^n} - x$ polinomnak;

d) K minden elemének minimálpolinomja osztója $(x^{p^n} - x)$-nek.

Hf1. Határozzuk meg a $\mathbb{Q}(\sqrt{4-\sqrt{2}})$ minimálpolinomját $\mathbb{Q}$ fölött!

Hf2. Legyen $K = \mathbb{F}_2(\alpha)$ a kételemű testnek az $x^4 + x + 1 \in \mathbb{F}_2[x]$ polinom α gyökével való bővítése. Írjuk fel az $\frac{\alpha^2}{\alpha+1}$ elemet α legföljebb harmadfokú polinomjaként!