1. Hányadfokú a $\mathbb{Q}(i\sqrt{3})$, illetve az $\mathbb{Q}(i+\sqrt{3})$ bővítés $\mathbb{Q}$ fölött?

2. Számítsuk ki a következő testbővítések fokait $\mathbb{Q}$ fölött!
a) $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ b) $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ c) $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4})$ d) $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}+\sqrt{2})$

3. Hányadfokú az F/K bővítés, ha F az f felbontási teste, és
a) $K=\mathbb{Q}$, $f=x^6-1$ b) $K=\mathbb{Q}$, $f=x^6-2$
c) $K=\mathbb{F}_7$, $f=x^6-1$ d) $K=\mathbb{F}_5$, $f=x^6-2$

4. Legyen α az x^3+x+1 polinom egyik gyöke $\mathbb{F}_2$ fölött, és legyen $K=\mathbb{F}_2(\alpha)$. Irreducibilis-e az $x^2+x+\alpha$ polinom K fölött?

5. Lássuk be, hogy ha $L|K$ algebrai testbővítés, és az R gyűrűre $K\le R\le L$, akkor R test!

6. Legyen K tetszőleges test, $K(t)$ pedig K-nak egy egyszerű transzcendens bővítése. Legyen $K<M\le K(t)$. Bizonyítsuk be, hogy $K(t)$ algebrai bővítése M-nek!

7. Tegyük fel, hogy $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{C}$ olyanok, hogy $\alpha\beta\gamma$, $\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma$ és $\alpha+\beta+\gamma$ is algebrai számok $\mathbb{Q}$ fölött. Bizonyítsuk be, hogy α, β és γ is algebraiak.

8. Bizonyítsuk be, hogy ha p prím, és K egy p^n elemű test, akkor
a) K-nak minden részteste p^d elemű az n valamely d osztójára;
b) n minden d osztójára van K-nak pontosan egy p^d elemű részteste;
c) $\mathrm{Aut}(K)$ egy n elemű ciklikus csoport, amelynek generátoreleme az $x\mapsto x^p$ $(x\in K)$ automorfizmus.

9. Tegyük fel, hogy K_1 és K_2 résztestek egy K testben, továbbá $|K_1|=64$, $|K_2|=256$. Hány eleme lesz a K_1 és K_2 által generált résztestnek K-ban?

10. Bizonyítsuk be, hogy $\mathbb{Z}_p$ fölött egy n-edfokú irreducibilis polinom felbontási testében minden olyan $\mathbb{Z}_p$ fölött irreducibilis polinom lineáris faktorokra bomlik, amelynek a foka osztója n-nek. Következésképpen egyetlen n-edfokú irreducibilis polinom egyetlen gyökével való bővítésben az összes n-edfokú irreducibilis polinom összes gyöke benne van.

Hf1. Legyen α az x^2+x-1 polinom egyik gyöke $\mathbb{F}_3$ fölött, és $K=\mathbb{F}_3(\alpha)$. Határozzuk meg az x^2+1 polinom összes gyökét K-ban mint az α lineáris polinomját!

Hf2. Tegyük fel, hogy $\alpha,\beta\in L$ elemekre $\alpha+\beta$ algebrai, $\alpha\beta$ pedig transzcendens a K résztest fölött. Hány lehet algebrai az α, β és $\alpha^2+\alpha$ közül?