

1. Legyen α az $x^3 - 2$ polinom egyik nem valós gyöke. Határozzuk meg α fokát $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ fölött, és határozzuk meg a $\mathbb{Q}(\alpha) \cap \mathbb{R}$ részttestet! Igaz-e, hogy ha $K \leq L \leq M$, és $\alpha \in M$, akkor α L fölötti foka osztója α K fölötti fokának?
 2. Bizonyítsuk be, hogy minden másodfokú bővítés normális!
 3. Igaz-e, hogy normális bővítés normális bővítése normális az eredeti test fölött?
 4. Legyen $L|K$ egy testbővítés, M és N pedig olyan közbülső testek, amelyekre az $M|K$ és $N|K$ bővítések normálisak. Legyen S az L -nek az M és N által generált résztteste és $T = M \cap N$. Bizonyítsuk be, hogy az $S|K$ és $T|K$ bővítések mindegyike normális.
 5. Hányadfokú $x^4 - x^2 + 1$ felbontási teste \mathbb{Q} fölött, illetve \mathbb{F}_p fölött, ha p prím?
 6. Igaz-e, hogy egy $K = \mathbb{F}_p(\alpha)$ ($\alpha \notin \mathbb{F}_p$) testben α szükségképpen generátoreleme a K multiplikatív csoportjának?
 7. Bizonyítsuk be, hogy tökéletes test minden véges bővítése is tökéletes.
 8. a) Tegyük fel, hogy α és β algebrai elemek K fölött, és a minimálpolinomjuk gyökei $\alpha = \alpha_1, \dots, \alpha_n$, illetve $\beta = \beta_1, \dots, \beta_m$ mind különbözők. Legyen továbbá $c, d \in K \setminus \{0\}$ olyan, hogy $(i, j) \neq (1, 1)$ esetén $c\alpha + d\beta \neq c\alpha_i + d\beta_j$. Lássuk be a szeparábilis bővítés egyszerűségéről szóló tétel bizonyítása alapján, hogy $K(c\alpha + d\beta) = K(\alpha, \beta)$.
b) Alkalmazzuk az a) részben bizonyított tételt $(\mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3}) : \mathbb{Q})$, illetve $(\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2} + \sqrt{2}) : \mathbb{Q})$ kiszámítására.
 9. Adjuk meg az $\mathbb{F}_2(\alpha, \beta)$ bővítést egyszerű bővítésként, ahol α az $x^2 + x + 1$, β az $x^3 + x + 1$ polinom egy-egy gyöke.
- Hf1.** Adjuk meg $x^4 - 2$ felbontási testét \mathbb{Q} egyszerű bővítéseként!
- Hf2.** Bizonyítsuk be, hogy $\mathbb{Q}(\cos 40^\circ)$ normális bővítése \mathbb{Q} -nak!