

1. Keressünk olyan  $p(x) \in \mathbb{Q}[x]$  polinomokat, melyeknek a Galois-csoportjai rendre:
    - a)  $C_3$ ;
    - b)  $C_2^n$ ;
    - c)  $S_3$ .
  2. Bizonyítsuk be, hogy ha az  $L|K$  Galois-bővítés páros fokú, akkor  $L$  megkapható egy résztestének egy elem négyzetgyökével való bővítéseként.
  3. Ha egy racionális együtthatós polinom Galois-csoportja a kvaterniócsoporttal izomorf, akkor legalább hányadfokú a polinom?
  4. Melyik  $n$  egészekre szerkeszthető  $n$  fokos szög?
  5. Megszerkeszthető-e egy tetszőlegesen megadott szög ötödrésze?
  6. Határozzuk meg  $\cos(2\pi/n)$  fokát  $\mathbb{Q}$  fölött.
  7. Egy egységnyi hosszúságú szakasz két végpontjából kiindulva megszerkeszthető-e az 1 térfogatú, szabályos tetraéder élhossza?
  8. Megszerkeszthető-e egy egyenlőszárú háromszög, ha adott a szára és a beírt kör sugara?
  9. Tudjuk, hogy  $\mathbb{Q}(\cos 40^\circ)$  Galois-csoportja 3-elemű. Van-e olyan racionális szám, amelynek a köbgyökével való bővítés ugyanezt a testet adja?
  10. Bizonyítsuk be, hogy ha egy  $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$  irreducibilis polinom Galois-csoportja kommutatív, akkor a Galois-csoport rendje  $\deg f$ .
  11. Az alábbiak közül melyik polinomok gyökeit lehet az alpműveletek és gyökvonás segítségével felírni?
    - a)  $x^4 + 2x^3 - 5x + 1$
    - b)  $x^5 - 15x^4 + 6$
    - c)  $x^6 - 2x^2 + 4$
- Hf1.** Hány elem áll elő négyzetszámként, illetve köbszámként  $\mathbb{F}_{27}$ -ben? Adjunk meg egy olyan irreducibilis polinomot  $\mathbb{F}_3$  fölött, amelynek minden gyöke négyzetszám  $\mathbb{F}_{27} \setminus \mathbb{F}_3$ -ban!
- Hf2.** Határozzuk meg a  $\text{Gal}(L|K)$  Galois-csoportot, ahol  $K = \mathbb{Q}(i\sqrt{3})$  és  $L = K(\sqrt[6]{7})$ .