1. *A következő mátrixok közül melyik normális, melyik önadjungált indefinit?*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Megoldás: A ferdén szimmetrikus, C és D szimmetrikus, ezért normálisak. $BB^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = B^T B$, így B nem normális. Akármilyen definitséget csak önadjungált mátrixra definiálunk, ezért csak C-ről és D-ről kell eldönteni, hogy indefinit-e, azaz, hogy negatív és pozitív értéke is lehet-e a $\mathbf{v}^T C\mathbf{v}$-nek, illetve $\mathbf{v}^T D\mathbf{v}$-nek. D-nek az átlójában is van pozitív és negatív eleme, így szükségképpen indefinit ($\mathbf{v} = (0,0,1)^T$ és $\mathbf{v} = (0,1,0)$-ra kapunk pozitív, illetve negatív értéket). C-t szimultán sor-oszlopműveletekkel diagonális alakra hozzuk, és így az $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ alakhoz jutunk, amelynek az átlójában pozitív és negatív elem is van, így C is indefinit. (Az indefinitséget azzal is bebizonyíthatjuk, ha belátjuk, hogy a mátrix sajátértékei között van negatív és pozitív is.)

2. *A következő mátrixok közül melyik irreducibilis, melyik primitív?*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Megoldás: A G_A gráf és G_D gráf nem erősen összefüggő, mert az elsőben az $\{1,2,3\} \cup \{4\}$, a másiknál a $\{3\} \cup \{1,2\}$ olyan felbontása a csúcsok halmazának, ahol az első részhalmazból a másodikba nem megy él. Tehát A és D reducibilis. B és C irreducibilis, mert a hozzájuk tartozó gráf minden csúcsából minden csúcsot el lehet érni. C primitív is, mert amellett, hogy irreducibilis, a főátlójában van pozitív elem (másképp: $C^3 > 0$). B imprimitív, mert az 1-et az 1-ből csak 3-mal osztható hosszúságú úton lehet elérni, tehát B^k nem pozitív, ha k nem osztható 3-mal. (Másképp: B^3 reducibilis, ezért nincs pozitív hatványa, és így B-nek sincs.)

3. *Adjuk meg az* $A = \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}$ *pozitív definit mátrix SVD-felbontását, és ennek segítségével adjunk meg olyan pozitív definit B mátrixot, amelyre $B^2 = A$.*

Megoldás: $A^*A = \begin{bmatrix} 41 & -40 \\ -40 & 41 \end{bmatrix}$, sajátértékei 81 és 1, az A szinguláris értékei 9 és 1. Az A^*A mátrix 81-hez és 1-hez tartozó sajátvektorai $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ és $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, az ezekből készülő ortonormált rendszer $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$, amiből $M = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$. $AM = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 9 & 1 \\ -9 & 1 \end{bmatrix}$, és ennek oszlopait lenormálva kapjuk M'-t: $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, amivel $A = M'\Sigma' M^* = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. Ebből B-t úgy kapjuk, hogy A előállításában Σ' helyett a négyzetgyökét, $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$-et érjuk, és az eredmény $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$.

Megjegyzés: Mivel A pozitív (szemi)definit, egyszerűbben is megkaphatjuk A SVD-felbontását: a szinguláris értékek éppen A sajátértékei, és az unitér mátrixok az A-t diagonálisba transzformáló mátrixszal egyeznek meg: $A = UDU^*$, ahol U oszlopai egy sajátvektorokból álló ortonormált rendszer elemei, a sajátértékek csökkenő sorrendjében.

4. *Adjuk meg az alábbi mátrix karakterisztikus polinomját, sajátalterének dimenzióját, Jordan-féle normálalakját és minimálpolinomját. Mi az A^n Jordan-normálalakja?*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Megoldás: Mivel $A - xI$ háromszögmátrix, $k_A(x) = |A - xI| = (2-x)^4$, és A-nak a 2 az egyetlen sajátértéke. $A - 2I$ rangja 1, ezért a magtere $4 - 1 = 3$ dimenziós, vagyis A-nak a 2-höz tartozó sajátaltere 3 dimenziós. Ebből következik, hogy A Jordan-normálalakjában, J-ben három 2-blokk van, és ez csak úgy lehet, hogy van egy 2×2-es és két 1×1-es. A blokkok méretének a maximuma 2, ezért A minimálpolinomjában $x - 2$ kitevője 2, vagyis $m_A(x) = (x-2)^2$. A^n Jordan-normálalakja ugyanaz, mint a hozzá hasonló J^n Jordan-normálalakja, J^n pedig blokkdiagonális mátrix, amelynek diagonális blokkjai $\begin{bmatrix} 2^n & 0 \\ n2^{n-1} & 2^n \end{bmatrix}$, illetve két $[\,2^n\,]$. Ugyanúgy, mint az A-ra, azt kapjuk, hogy A^n 2^n-hez (az A^n egyetlen sajátértékéhez) tartozó sajátaltere 3-dimenziós, tehát a Jordan-normálalakja egy 2×2-es és két 1×1-es 2^n-blokkból áll:

$$A \sim J = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad A^n \sim J^n \sim \begin{bmatrix} 2^n & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2^n \end{bmatrix}.$$

5. *Bizonyítsuk be, hogy ha az $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ mátrix rangja n, akkor A^*A invertálható, és A Moore–Penrose-féle pszeudoinverze $(A^*A)^{-1}A^*$.*

Megoldás: Tudjuk, hogy $r(A) = r(A^*A)$, tehát A^*A n rangú, $n \times n$-es mátrix, ezért invertálható. Annak bizonyításához, hogy $A' = (A^*A)^{-1}A^*$ az A pszeudoinverze, a pszeudoinverzet definiáló négy tulajdonságot kell ellenőrizni: $AA'A = A$, $A'AA' = A'$, továbbá AA' és $A'A$ mindegyike önadjungált. Érdemes az utolsóval kezdeni. $A'A = ((A^*A)^{-1}A^*)A = (A^*A)^{-1}(A^*A) = I_n$ önadjungált. $(AA')^* = (A')^*A^* = ((A^*A)^{-1}A^*)^*A^* = A((A^*A)^{-1})^*A^* = A((A^*A)^*)^{-1}A^* = A(A^*A)^{-1}A^* = AA'$, tehát AA' is önadjungált. $AA'A = AI_n = A$ és $A'AA' = I_nA' = A'$ (itt felhasználtuk az elsőként bizonyított összefüggést, vagyis azt, hogy A' az A-nak bal oldali inverze).

6. *Bizonyítsuk be, hogy egy $A \geq 0$ irreducibilis mátrix minden nemnegatív sajátvektora pozitív.*

Megoldás: Legyen $\mathbf{v} \geq 0$ az A λ-hoz tartozó sajátvektora. Ekkor $\mathbf{v}$ az $(A+I)^n$-nek is sajátvektora $(\lambda+1)^n$ sajátértékkel. De A irreducibilitása miatt $(A+I)^n > 0$, tehát $(\lambda+1)^n\mathbf{v} = (A+I)^n\mathbf{v} > 0$, ezért $\mathbf{v} \geq 0$ egyik komponense sem lehet 0, vagyis $\mathbf{v} > 0$. Másik megoldás: Legyen $H = \{\, i \mid v_i > 0\,\}$, és $H' = \{\,1, 2, \ldots, n\,\} \setminus H$. Mivel $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$, minden $j \in H'$-re $A\mathbf{v}$ j-edik eleme 0, azaz j-ből a H-beli i-kbe nem megy él az A gráfjában. $\mathbf{v} \neq 0$ miatt $H \neq \emptyset$, és ha $H' \neq \emptyset$, akkor $H \cup H'$ felbontás miatt A reducibilis lenne. Tehát $H' = \emptyset$, azaz $\mathbf{v} > 0$.